1. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$　② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$　④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{PA})^2=(x-2)^2+y^2$
$(\overline{PB})^2=x^2+(y-2)^2$
$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$
$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

2. 세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2,3)$ ② $(-2,3)$ ③ $(2,-3)$

④ $(-2,-3)$ ⑤ $\left(2,\frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
$(-1)^2+1^2-a+b+c=0$
$\therefore a-b-c=2\ \cdots\cdots$㉠
$2^2+2^2+2a+2b+c=0$
$\therefore 2a+2b+c=-8\ \cdots\cdots$㉡
$6^2+6a+c=0$
$\therefore 6a+c=-36\ \cdots\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-4,\ b=6,\ c=-12$
즉, $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 이므로
표준형으로 나타내면
$(x-2)^2+(y+3)^2=25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 이다.

3. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 과 중심이 같고 점 $(5,\ -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$
$\therefore$ 중심은 $(2,1)$ 이다.
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$
$(5,\ -3)$ 을 지나므로 대입하면,
$(5-2)^2+(-3-1)^2=r^2 \quad r=5$
$\therefore \quad a+b+r=2+1+5=8$

4. 방정식 $x^2 + y^2 + kx - 2y + 10 = 0$ 이 원을 나타낼 때, k 의 범위를 구하면?

① $-4 < k < 5$　　② $k < -4$ 또는 $k > 5$

③ $-6 < k < 6$　　④ $k < -6$ 또는 $k > 6$

⑤ $-4 < k < 6$

해설

준 식 : $\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{k^2}{4} - 9$

중심이 $\left(-\frac{k}{2},\ 1\right)$,

반지름이 $\sqrt{\frac{k^2}{4} - 9}$ 인 원이 되려면

$\frac{k^2}{4} - 9 > 0$

$\therefore\ k^2 - 36 > 0$

$\therefore\ (k+6)(k-6) > 0$

$\therefore\ k < -6$ 또는 $k > 6$

5. 두 점 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$을 지나고, x축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ 이라 하면
$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$을 지나므로
$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2,\ (2-a)^2+(1-b)^2=b^2$
$1-2a+a^2+4-4b=0\cdots$㉠
$4-4a+a^2+1-2b=0\cdots$㉡
㉡$\times 2-$㉠
$a^2-6a+5=0,\ (a-1)(a-5)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=5$
ⅰ) $a=1$ 이면 ① 에서 $b=1$
ⅱ) $a=5$ 이면 ① 에서 $b=5$
$\therefore$ 두 원의 중심은 $(1,1)$, $(5,5)$ 이다.
중심거리
$=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

6. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2+y^2=1,\quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$
㉡ $(x+1)^2+y^2=2,\quad x^2+(y+3)^2=2$
㉢ $x^2+y^2=2,\quad (x+1)^2+(y-1)^2=8$
㉣ $x^2+y^2=4,\quad (x-3)^2+(y+4)^2=9$
㉤ $x^2+y^2-2x=0,\quad x^2+y^2-4x+2y+4=0$

① ㉠ ② ㉠, ㉤ ③ ㉡
④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$|r-r'|<d<|r+r'|$ 이어야 한다.
㉡ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

7. 두 원 $x^2-2x+y^2+3=0$과 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x-y-3=0$　② $2x-2y+3=0$

③ $2x-2y-3=0$　④ $2x+2y-3=0$

⑤ $2x+2y+3=0$

해설

$(x^2-2x+y^2+3)-(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$

$-4x+4y+6=0$

$\therefore\ 2x-2y-3=0$

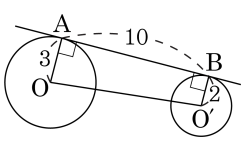
8. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

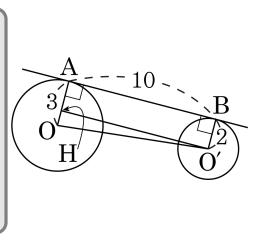
9. 다음 그림의 두 원 O, O′ 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



① $\sqrt{101}$ ② $\sqrt{103}$ ③ $\sqrt{105}$ ④ $\sqrt{106}$ ⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O′ 에서 선분 AO 에 내린 수선의 발을 H 라 하면,
직각삼각형 OO′H 에서
$\overline{OO'} = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



10. 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2<k<2$　② $0<k<4$　③ $-4<k<0$

④ $-2<k<0$　⑤ $-4<k<4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4<k<4$$

11. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

12. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

13. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a,b) 에서의 접선이 점 $(6,6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로
$6a+6b=9 \quad \therefore a+b=\frac{3}{2}$
또, 점 (a,b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서
$9=\frac{9}{4}-2ab \quad \therefore ab=-\frac{27}{8}$

14. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y = x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ② $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

③ $(4, 4)$ ④ $(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$

⑤ $(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}-2)$

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$
위의 점 $\mathrm{P}(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은
$-x + \sqrt{3}y = 4$ 이므로 이 방정식과
$y = x$ 를 연립하면 $-x + \sqrt{3}x = 4$

$$\therefore\ x = \frac{4}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3}+2$$

따라서 구하는 교점의 좌표는
$(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$

15. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.