1. 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -2　② $-\frac{3}{2}$　③ 0　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$\therefore\ a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

또, y 절편이 -1 이므로 $b = -1$

$\therefore\ a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$

2. 일차함수 $y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ −6 ⑤ −3

해설

$y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a-2=\tan 45°=1$ 에서 $a=3$
또, y 절편이 5 이므로
$b+2=5$ 에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=6$

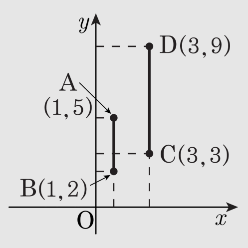
3. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \le f(1) \le 5$, $3 \le f(3) \le 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$ 를 동시에 지나야 하고

a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기이고

a의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 기울기이다.

$\overline{\mathrm{BD}}$의 기울기$= \dfrac{9-2}{3-1} = \dfrac{7}{2}$

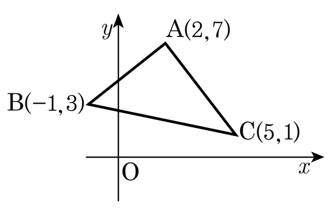
$\overline{\mathrm{AC}}$의 기울기$= \dfrac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값$= \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore \ -1 \le a \le \dfrac{7}{2}$

4. 세 점 $A(2,\ 7)$, $B(-1\ ,3)$, $C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$ ② $x+y-2=0$ ③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$ ⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{BC}$의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

5. 세 점 $\mathrm{A}(1, 4)$, $\mathrm{B}\ (-1, 2)$, $\mathrm{C}\ (5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2　　② 8　　③ 10　　④ −2　　⑤ −4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

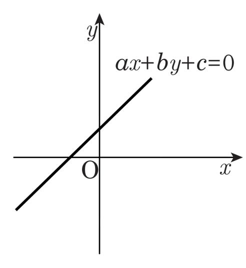
기울기 $= \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

6. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{a}{b} < 0$

y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{c}{b} < 0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$

마찬가지로 일차함수 $cx + ay + b = 0$ 은

$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a} < 0$

y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

7. 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, m의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

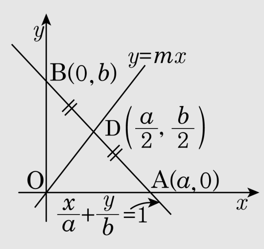
① $\dfrac{b}{a}$　　② $\dfrac{a}{b}$　　③ $\dfrac{b}{2a}$　　④ $\dfrac{a}{2b}$　　⑤ $\dfrac{2a}{b}$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을 $\mathrm{D}\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$라 하면

$\triangle\mathrm{OAD}=\triangle\mathrm{OBD}$이므로 직선 $y=mx$가 점 D를 지나야 한다.

$\therefore m=\dfrac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{b}{a}$



8. 점 $(1,\ 0)$을 지나고 직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$에 수직인 직선의 y절편은?

① $-\sqrt{3}$　② $-\sqrt{2}$　③ -1　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$의 기울기가 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로
구하는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$이다.
따라서 구하는 직선은 $y=\sqrt{2}(x-1)$이므로
이 직선의 y절편은 $-\sqrt{2}$이다.

9. 두 점 $A(3, 2)$, $B(a, b)$를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2$$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4$ ······㉠

$\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\,\frac{2b+2}{3}-3=0,$$

$a+2b-1=0$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ 3a+b=5$

10. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$　② $-\frac{3}{23}$　③ $-\frac{1}{23}$　④ $\frac{2}{23}$　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(ⅰ) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는
각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로
$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$
이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

11. 점 $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$\mathrm{M}\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=(2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

$(2,3)$ 을 지나므로 $l: y-3=-2(x-2)$

$\therefore \quad 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot1+0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

12. 두 직선 $x+y=4$, $2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=4x+7$　② $y=4x-7$　③ $y=-4x+7$
④ $y=-4x-7$　⑤ $y=-x+7$

해설

두 직선의 방정식

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots ㉠ \\ 2x-y+1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=3$

즉, 교점 $(1,\ 3)$과 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)$

즉, $y=-4x+7$

13. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1 사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$ ② $-2<m<3$ ③ $-1<m<2$
④ $1<m<4$ ⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1 사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

14. 점 $\mathrm{P}(1, 2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)
= (점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

15. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.
$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$
$\therefore\ k = 0$
이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$
$\therefore\ a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 2$

16. 원점에서의 거리가 1 이고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$ 으로 표현될 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선은
$y = m(x-1) + 2$ 에서,
$mx - y - m + 2 = 0 \cdots$ ㉠
여기서 $(0, 0)$ 에 이르는 거리가 1 이므로
$\dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1,\ |m-2| = \sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m = \dfrac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\dfrac{3}{4}x - y + \dfrac{5}{4} = 0$,
$3x - 4y + 5 = 0$
$\therefore\ a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$

17. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

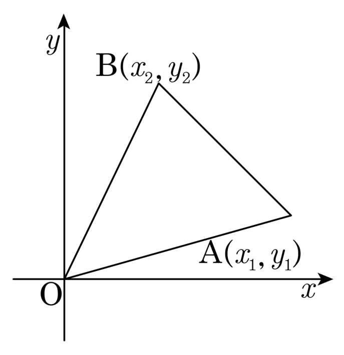
$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

18. 원점 O(0, 0)와 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$　② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$　③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$　⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B$(x_2,\ y_2)$에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ 이다.

$\therefore\ \triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

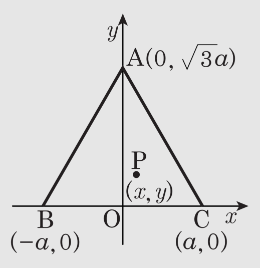
19. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분

④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

20. 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$, $\mathrm{C}(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow\quad x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$