

1. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

- ㉠ $1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ㉡ $-1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ㉢ $-1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$
㉣ -1 ㉤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0$$

$$x^2+x+2=0 \text{ 의 근 : } \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\therefore \text{ 해 : } 1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

2. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

- ① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$
- ② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$
- ③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$
- ④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$
- ⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$x(x+6) = x^2 + 6x$
 $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$
 $x^2 + 6x = X$ 로 놓으면
 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$
 $X(X+8) + 15 = 0,$
 $X^2 + 8X + 15 = 0$
 $(X+3)(X+5) = 0$
 $\therefore X = -3, X = -5$
ⓐ : $X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$
 $x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$
ⓑ : $X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$
 $(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$

3. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

4. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하면?

① -5

② -6

③ 0

④ 5

⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 놓으면

$$t^2 + 5t - 6 = 0, (t + 6)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = 1, -6$$

$$\text{즉, } x + \frac{1}{x} = 1, x + \frac{1}{x} = -6$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고

㉡식에서 두 실근의 합은

근과 계수와의 관계에서

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$

5. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$ 이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = -3$

인수정리와 조립제법을 이용하면

$$(\text{좌변}) = (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{의 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore a = -3, \text{ 나머지 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

6. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 \leq k$

② $1 \leq k < 2$

③ $k > 0$

④ $-1 < k \leq \frac{1}{4}$

⑤ $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$(x+1)(x^2 + x + k) = 0$$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2 + x + k = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$D = 1^2 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

7. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

- (가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

- ① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

8. 방정식 $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 5, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -1 \text{ 이므로} \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \\ &= 1 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 1 + 2 - (-1) - 5 = -1 \end{aligned}$$

9. $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의
세 근이 α, β, γ 이므로
 $\alpha + \beta + \gamma = -2,$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3,$
 $\alpha\beta\gamma = -1$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3,$
 $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 2,$
 $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
 $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \cdots \cdots$ ①
 $x = \frac{1}{X}$ 로 놓으면
 $\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0$
 $\therefore X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \cdots \cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ 이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.
 $\therefore$ 구하는 방정식은
 $X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0$ 에서
 $abc = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

10. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -15 ② -10 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 이므로 켤레근은 $1 - \sqrt{2}i$
세 근이 α, β, γ 일때 $\alpha\beta\gamma = 3$ 이므로, $\alpha = 1 + \sqrt{2}i, \beta = 1 - \sqrt{2}i$
라 하면, $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) \cdot \gamma = 3$
 $3 \cdot \gamma = 3$
 $\gamma = 1$
 $\alpha + \beta + \gamma = -a = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) + 1 = 3$
 $a = -3$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = b = 3 + (1 - \sqrt{2}i) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + \sqrt{2}i) = 5$
 $b = 5$
 $\therefore ab = (-3) \cdot 5 = -15$

11. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^6 + \omega^2 + \omega + 1$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\omega^3 &= 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \\ (\omega^3)^2 + (\omega^2 + \omega + 1) &= 1^2 + 0 = 1\end{aligned}$$

12. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

13. 연립 방정식
$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ x - y + 3z = -4 \\ 3x + 2y + z = 11 \end{cases}$$
 을 만족하는 x, y, z 에 대하여

$3x - 2y - z$ 의 값은 얼마인가?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 & \cdots \textcircled{1} \\ x - y + 3z = -4 & \cdots \textcircled{2} \\ 3x + 2y + z = 11 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 3x + 2z = 4 \cdots \textcircled{4}$$

$$(2 \times \textcircled{1}) - \textcircled{3} : x - 3z = 5 \cdots \textcircled{5}$$

$$11z = -11 \quad \therefore z = -1$$

$$\textcircled{4} \text{ 식에 } z \text{ 값 대입 : } x = 2$$

$$\textcircled{1} \text{ 식에 } x, z \text{ 값 대입 : } y = 3$$

$$3x - 2y - z = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - (-1) = 1$$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, 곱 $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하면?

① 18 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 30

해설

주어진 세 식을 합하면 $2 \cdot (x+y+z) = 18$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 9$

$$\begin{cases} \alpha = 9 - (\beta + \gamma) = 9 - 6 = 3 \\ \beta = 9 - (\alpha + \gamma) = 9 - 7 = 2 \\ \gamma = 9 - (\alpha + \beta) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

$\therefore \alpha\beta\gamma = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

15. x, y 에 관한 연립방정식 $\begin{cases} kx + y = -3 \\ 2x + (k-1)y = 6 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때의 k 의 값을 α , 해가 없을 때의 k 의 값을 β 라 하면, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

해가 무수히 많을 조건은 $\frac{k}{2} = \frac{1}{k-1} = \frac{-3}{6}$

해가 없을 조건은 $\frac{k}{2} = \frac{1}{k-1} \neq \frac{-3}{6}$

$\frac{k}{2} = \frac{1}{k-1}$ 에서 $k(k-1) = 2$,

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$\therefore k = -1, 2$$

(i) $k = -1$ 일 때,

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-1-1} = \frac{-3}{6} \text{ 이므로 해가 무수히 많다.}$$

(ii) $k = 2$ 일 때,

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{2-1} \neq \frac{-3}{6} \text{ 이므로 해가 없다.}$$

$$\therefore \alpha = -1, \beta = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1$$

16. 연립방정식 $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ 의 근 x, y 가 $xy = a$, $x + y = b$ 를 만족할 때, $a - b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 & \dots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 = 25 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠식을 정리해서

$y = 2x - 5$ 를 ㉡식에 대입한다.

$$x^2 + (2x - 5)^2 = 25,$$

$$5x^2 - 20x = 0, \quad x(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 0, 4$$

$$\text{i) } x = 0 \text{ 일 때, } y = -5$$

$$\therefore a = 0, \quad b = -5$$

$$\therefore a - b = 5$$

$$\text{ii) } x = 4 \text{ 일 때, } y = 3$$

$$\therefore a = 12, \quad b = 7$$

$$\therefore a - b = 5$$

17. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,
 $\alpha + \beta$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 & \cdots ② \end{cases}$$

①식을 인수분해하면

$$(2x - y)(x - y) = 0 \quad \therefore y = 2x, y = x$$

②식에 대입하면

$$y = 2x \text{ 일 때 } 5x^2 - (2x)^2 = 4, x^2 = 4, x = \pm 2, y = \pm 4$$

$$y = x \text{ 일 때 } 5x^2 - x^2 = 4, 4x^2 = 4, x^2 = 1, x = \pm 1, y = \pm 1$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, 2, -2$$

$$\therefore \alpha + \beta \text{의 최댓값은 } 6$$

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots \textcircled{A}$
 $4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{B}$ 식+2× $\textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$
 $\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$
 $\textcircled{A}$: $3x = y$ 를 $\textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7x^2 = 7 \quad x = 1(x > 0), \quad y = 3$
 $\therefore x + y = 4$
 $\textcircled{A}$: $2x = 3y$ 를 $4 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, y = 2(y > 0), x = 3$
 $\therefore x + y = 5$
 $a > b$ 이므로 $a = 5, b = 4$
 $\therefore a - b = 1$

19. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = -5 \dots\dots ① \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \dots\dots ② \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대해

$x + y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면

①은 $u + v = -5 \dots\dots ③$

②는 $u^2 - v = 7 \dots\dots ④$

③, ④에서 v 를 소거하면

$$u^2 + u - 2 = 0$$

$$\therefore (u - 1)(u + 2) = 0$$

$u = 1$ 일 때, $v = -6$ 이므로

$$t^2 - t - 6 = 0 \text{ 에서 } t = -2, 3$$

$u = -2$ 일 때, $v = -3$ 이므로

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \text{ 에서 } t = 1, -3$$

따라서, 구하는 근은

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore M = 1, \quad m = -2 \quad \therefore M + m = -1$$

20. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여 xy 의 값이 아닌 것은?

① -15

② -7

③ -3

④ 5

⑤ 15

해설

$xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 에서 $(x - 2)(y + 4) = 3$

x, y 가 정수이므로

$(x - 2, y + 4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$

$\therefore (x, y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$

$\therefore xy = -3, -7, -15, 5$

21. 이차방정식 $x^2 + (k + 1)x + 2k + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

두 근을 α, β ($\alpha \geq \beta$) 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$\begin{cases} \alpha + \beta = -(k + 1) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = 2k + 1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = -1$

$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = 3, \quad (\alpha + 2)(\beta + 2) = 3$

α, β 가 정수이므로 $(\alpha + 2, \beta + 2) = (3, 1), (-1, -3)$

$\therefore (\alpha, \beta) = (1, -1), (-3, -5)$

$\textcircled{1}$ 에서

$k = -(\alpha + \beta + 1)$ 이므로 $k = -1, 7$

$k > 0$ 이므로 $k = 7$

22. 방정식 $x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ 에서
 $x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$
 $(x + 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0$
 $x + 2y, y - 1$ 은 실수이므로 $x + 2y = 0, y - 1 = 0$
 $\therefore y = 1, x = -2y = -2$
 $\therefore x + y = -1$

23. p 가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$ 이 오직 한 개의 공통근 α 를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\alpha^2 + p\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + p = 0$$

$$\alpha(p-3) - (p-3) = (\alpha-1)(p-3) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ or } p = 3$$

$$p = 3 \text{ 이면 두 다항식이 같아지므로 } \alpha = 1$$

$$\therefore 1 + p + 3 = 0 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore \alpha - p = 1 - (-4) = 5$$

24. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

25. 연립방정식
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$
의 해에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- I. 이 방정식은 a 의 값에 관계없이 항상 해를 갖는다.
- II. $a = -2$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
- III. 이 방정식이 무수히 많은 해를 가지는 a 는 꼭 한 개 있다.
- IV. 이 방정식이 유일한 해를 가지면, 그 해의 x, y, z 의 값은 모두 같다.

- ① II

② II, III

③ III, IV
- ④ I, III, IV

⑤ I, II, III, IV

해설

세 방정식을 더하면 $(a + 2)(x + y + z) = 3$
i) $a = -2$ 이면 이 방정식의 해는 없다.
따라서 I , II 는 옳지 않다.
ii) $a \neq -2$ 이면 $x + y + z = \frac{3}{a + 2} \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 에서 첫 번째 식을 빼면 $(a - 1)x = \frac{a - 1}{a + 2}$
따라서 $a = 1$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 가지고,
 $a \neq 1$ 이면 $x = \frac{1}{a + 2}$
같은 방법으로 $y = \frac{1}{a + 2}, z = \frac{1}{a + 2}$
따라서 III, IV 는 옳다.