

1. x 축에 대해 서로 대칭인 그래프를 모두 고르면?

① $y = -2x^2$

② $y = \frac{1}{3}x^2$

③ $y = -3x^2$

④ $y = -\frac{1}{3}x^2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x^2$

해설

x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이다.

2. $y = -2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $y = -2x^2$ 의 그래프와 모양이 같다.

② 제3 사분면을 지나지 않는다.

③ 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -3)$ 이다.

④ y 축과의 교점은 $(0, -5)$ 이다.

⑤ 축의 방정식은 $x = 1$ 이다.

해설

$$\begin{aligned}y &= -2x^2 + 4x - 5 \\&= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 5 \\&= -2(x - 1)^2 - 3\end{aligned}$$

② 위로 볼록한 모양의 포물선이고 꼭짓점의 좌표가 $(1, -3)$, y 절편이 $(0, -5)$ 이므로 제 3 사분면을 지난다.

③ 꼭짓점의 좌표는 $(1, -3)$ 이다

3. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 식은?

① $y = -x^2 + 4x + 1$

② $y = x^2 - 4x + 1$

③ $y = -x^2 + 4x - 7$

④ $y = x^2 + 4x - 3$

⑤ $y = -x^2 + 4x - 3$

해설

$$y = -(x - 2)^2 - 3 = -x^2 + 4x - 7$$

4. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x - 4)^2$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점의 y 좌표는?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$y = \frac{1}{2}(0 - 4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

5. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다.
이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$

② $y = -2x^2 - 4x + 5$

③ $y = -2x^2 + 4x - 3$

④ $y = -2x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned}y &= -2(x-1)^2 + 5 \\&= -2(x^2 - 2x + 1) + 5 \\&= -2x^2 + 4x + 3 \\ \therefore y &= -2x^2 + 4x + 3\end{aligned}$$

6. 원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 의 값이 -1 에서 5 까지 증가할 때, y 의 값은 24 만큼 감소한다. 다음 중 이 그래프 위에 있는 점은?

보기

㉠ $(2, -4)$

㉡ $(-4, -16)$

㉢ $(3, 9)$

㉤ $(-4, -32)$

㉥ $(4, -2)$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉤ ③ ㉡, ㉤ ④ ㉢, ㉥ ⑤ ㉤, ㉥

해설

원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수를 $f(x) = ax^2$ 이라 하자.

$f(x) = ax^2$ 에 대하여 $f(-1) = a$, $f(5) = 25a$ 이므로 $25a - a = -24$, $24a = -24$, $a = -1$ 이다.

$$\therefore f(x) = -x^2$$

$$\textcircled{1} f(2) = -1 \times (2)^2 = -4 \quad \therefore (2, -4)$$

$$\textcircled{2} f(-4) = -1 \times (-4)^2 = -16 \quad \therefore (-4, -16)$$

따라서 주어진 그래프 위의 점은 ㉠, ㉡이다.

7. 다음 보기의 이차함수의 그래프를 포물선의 폭이 넓은 순서대로 나열하여라.

보기

㉠ $y = 4x^2$

㉡ $y = -\frac{5}{2}x^2$

㉢ $y = -\frac{4}{3}x^2$

㉣ $y = \frac{1}{4}x^2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉢

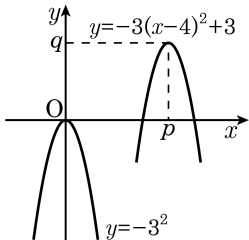
▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉠

해설

a 의 절댓값이 작을수록 포물선의 폭이 넓다. $\frac{1}{4} < \frac{4}{3} < \frac{5}{2} < 4$
이므로 ㉣, ㉢, ㉡, ㉠ 순으로 폭이 넓다.

8. $y = -3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 다음 그림과 같았다. 이 때, p, q 의 값을 각각 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p = 4$

▷ 정답 : $q = 3$

해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 y 축으로 q 만큼, x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y = a(x-p)^2 + q$ 인데 함수의 식이 $y = -3(x-4)^2 + 3$ 이므로 $p = 4, q = 3$ 이다.

9. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 5 + k$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나기 위한 k 값의 범위는?

① $k > -3$

② $k < -3$

③ $k > -5$

④ $k < -5$

⑤ $k > -7$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 와 x 축과의 교점의 개수

$b^2 - 4ac > 0$: 2개

$b^2 - 4ac = 0$: 1개

$b^2 - 4ac < 0$: 0개

$4^2 - 4 \times (-2) \times (5 + k) = 8k + 56 > 0 \quad \therefore k > -7$

10. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 꼭짓점의 좌표는 $(4, -2)$ 이다.

② 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$ 의 그래프와 모양이 같다.

③ $x < 4$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

④ $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이다.

⑤ 제 3 사분면을 지나지 않는다.

해설

③ $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$, 아래로 볼록하기 때문에, 축의 왼쪽에서는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

11. 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 3)$ 이고, 한 점 $(1, -6)$ 을 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식이 $y = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② 2

③ -6

④ 6

⑤ 1

해설

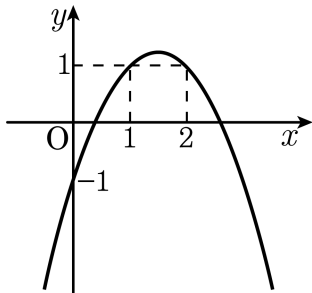
$y = a(x + 2)^2 + 3$ 이 점 $(1, -6)$ 을 지나므로

$-6 = a(1 + 2)^2 + 3, a = -1$ 이다.

$\therefore y = -(x + 2)^2 + 3 = -x^2 - 4x - 1$

$\therefore a + b + c = -1 - 4 - 1 = -6$

12. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a + 3b + c$ 의 값은?



① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

세 점 $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ 을 지나는 그래프이다.

점 $(0, -1)$ 을 지나므로 $-1 = c$

점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $1 = a + b + c$

점 $(2, 1)$ 을 지나므로 $1 = 4a + 2b + c$

세 식을 연립하면 $a = -1$, $b = 3$, $c = -1$ 이므로

$a + 3b + c = -1 + 9 + (-1) = 7$ 이다.

13. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + k + 2$ 의 최댓값이 0 일 때, k 의 값은?

① -5

② -3

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 7

해설

$$y = -3x^2 + 6x + k + 2 = -3(x - 1)^2 + k + 5$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값이 $k + 5$ 이므로

$$k + 5 = 0 \quad \therefore k = -5$$

14. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

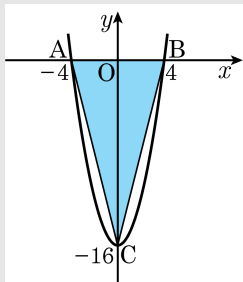
▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

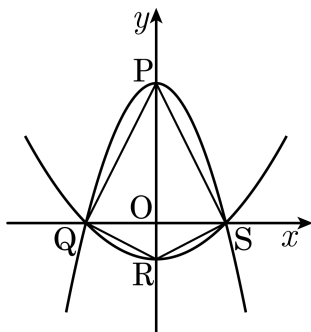
x 축과의 교점 A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.

꼭짓점의 좌표는 $(0, -16)$ 이다.



구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

15. 함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동하고, $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그림을 나타낸 것이다. 이 때 다음 설명 중 옳은 것의 개수는?



㉠ 점 $P(0,4)$ 이고, 점 $R(0,-1)$ 이다.

㉡ 점 $Q(2,0)$ 이고, 점 $S(-2,0)$ 이다.

㉢ $\overline{QS} = 8$ 이다.

㉣ $\triangle PRS = 5$, $\triangle QPR = 8$ 이다.

㉤ $\square PQRS = 12$ 이다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = -x^2 + 4$

함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

$y = -x^2 + 4$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 점 $Q(-2,0)$, $S(2,0)$ 이다.

$\overline{QS} = 4$

또, $P(0,4)$ 이고 $R(0,-1)$

$\triangle PRS = \triangle QPR = 5$

따라서 옳은 것은 ㉠이므로 1 개이다.

16. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$ 이 되도록 평행 이동하면 점 $(k, 6)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : -1

해설

이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 $(k, 6)$ 을 지나므로 대입하면 $6 = \frac{2}{3}(k-2)^2$, $9 = (k-2)^2$, $k-2 = \pm 3$ 따라서 $k = 5, -1$ 이다.

17. 이차함수 $y = x^2 + ax - b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{b}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{4}$

해설

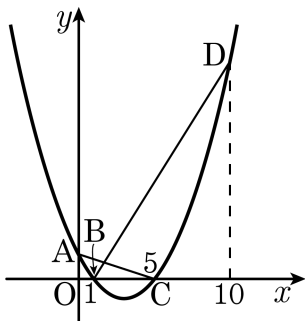
$$y = x^2 + ax - b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - b,$$

꼭짓점 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} - b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} - b = 0$,

$$b = -\frac{a^2}{4},$$

$$\therefore \frac{b}{a^2} = b \times \frac{1}{a^2} = -\frac{a^2}{4} \times \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

18. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하면?



① 106

② 107

③ 108

④ 109

⑤ 110

해설

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times c = 12 \text{ 이다.}$$

$c = 6$, 즉 $A(0, 6)$ 이다.

$$y = ax^2 + bx + 6 = a(x - 1)(x - 5) = ax^2 - 6ax + 5a \text{ 이다.}$$

$$5a = 6, a = \frac{6}{5}, b = -\frac{36}{5} \text{ 이다.}$$

$$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6 \text{ 이므로 } D(10, 54) \text{ 이다.}$$

$$\Delta BCD = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times 54 = 108$$

19. $x + y = 10$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10

② 24

③ 40

④ 45

⑤ 50

해설

$$y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= x^2 + x^2 - 20x + 100$$

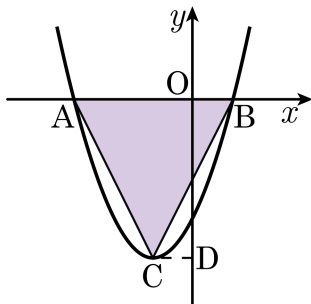
$$= 2x^2 - 20x + 100$$

$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 $x = 5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

20. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

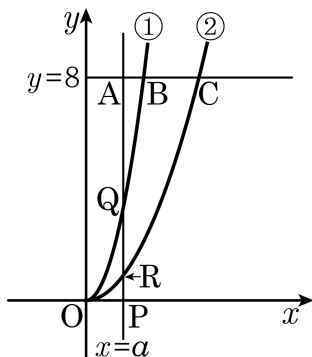
$$C(-1, -4)$$

$$y = 0 \text{ 일 때 } x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$A(-3, 0), B(1, 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

21. 다음 그림은 이차함수 $y = 2x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{1}$, $y = \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{2}$ 의 그래프이다. 직선 $y = 8$ 이 y 축 및 곡선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 와 점 A, B, C에서 만나고 $x = a$ 가 x 축 및 곡선 $\textcircled{2}$, $\textcircled{1}$ 과 점 P, R, Q에서 만날 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 와 $\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$ 의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\text{i)} 8 = 2x^2, x^2 = 4 \quad x > 0 \text{ 이므로 } x = 2$$

$$8 = \frac{1}{2}x^2, x^2 = 16 \text{ 에서 } x > 0 \text{ 이므로 } x = 4$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ii)} \overline{PR} = \frac{1}{2}a^2, \overline{PQ} = 2a^2,$$

$$\overline{QR} = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$\therefore \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{\frac{1}{2}a^2} = 3$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = 1 + 3 = 4$$

22. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ 의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 3개를 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

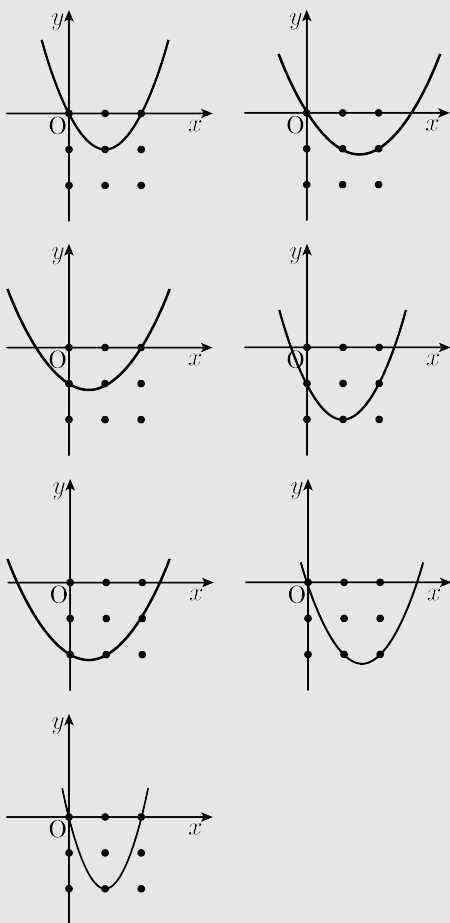
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 14개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2이고 y 좌표가 될 수 있는 정수는 -2, -1, 0이다.

포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 7개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 7개의 포물선을 그릴 수 있다.

따라서 구하는 포물선의 개수는 14개이다.

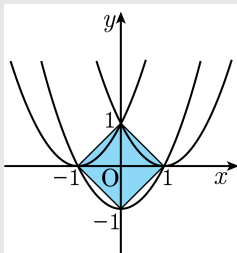
23. 세 이차함수 $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 1)^2$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

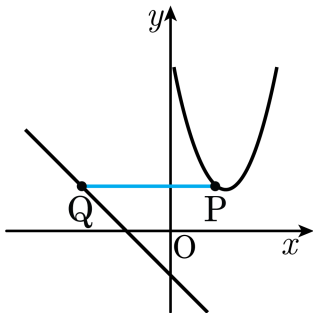
해설

세 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로
세 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이다.

24. 다음 그림에서 포물선 $y = x^2 - 5x + 8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y = -x - 2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 - 5x + 8$ 에서 점 P 의 좌표는 $P(a, a^2 - 5a + 8)$

$y = -x - 2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $Q(b, -b - 2)$

점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로

$a^2 - 5a + 8 = -b - 2$, $b = -a^2 + 5a - 10$ 이다.

$\overline{PQ} = a - b = a^2 - 4a + 10 = (a - 2)^2 + 6$

$\overline{PQ}$ 의 최솟값은 6 이다.

25. $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$, $2p - q \leq 3$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = -x^2 + px + q$ ($0 \leq x \leq 1$) 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$$

이때, $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$ 이고 $0 \leq x \leq 1$ 이므로

최댓값 M 은 $x = \frac{p}{2}$ 일 때이다.

$$\therefore M = q + \frac{p^2}{4}$$

또한 $2p - q \leq 3$ 에서 $q \geq 2p - 3$

$$\therefore M \geq \frac{p^2}{4} + 2p - 3 = \frac{1}{4}(p + 4)^2 - 7$$

따라서 M 의 최솟값은 -7 이다.