

1. $a < 0$ 일 때, $\sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2$ 을 계산하면?

- ① $0.1a^2 - 3$ ② $0.1a^2 + 3$ ③ $0.5a^2 - 3$
④ $0.5a^2 + 3$ ⑤ $a^2 - 3$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2 \\ &= -9a \times \left(-\frac{1}{3a}\right) + (-0.5a) \times \left(-\frac{1}{5}a\right) \\ &= 3 + 0.1a^2 \end{aligned}$$

2. $3x - y = 12$ 일 때, $\sqrt{5x + y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$3x - y = 12 \Rightarrow y = 3x - 12$$

$$\sqrt{5x + y} = \sqrt{5x + 3x - 12} = \sqrt{8x - 12}$$

$$\sqrt{8x - 12} = 1 \Rightarrow 8x - 12 = 1, x = \frac{13}{8}$$

(x 는 자연수가 아니다.)

$$\sqrt{8x - 12} = 2 \Rightarrow 8x - 12 = 4, x = 2$$

따라서 $x = 2$ 이다.

3. $0 < a < 1$ 일 때, 다음 중 가장 큰 값은?

① a^2

② $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$

③ $\sqrt{a}$

④ $\sqrt{(-a)^2}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$0 < a < 1$ 일 때 $a = \frac{1}{4}$ 라 하면

① $a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

② $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \sqrt{16} = 4$

③ $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

④ $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

4. 다음 중에서 옳은 설명을 모두 고른 것은?

모든 무리수 x, y 에 대하여
ㄱ. $x + y$ 는 항상 무리수이다.
ㄴ. $x - y$ 는 항상 무리수이다.
ㄷ. $x \times y$ 는 항상 무리수이다.
ㄹ. $x \div y$ 는 항상 무리수이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ **없다**

해설

ㄱ.의 반례 : $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$
ㄴ.의 반례 : $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$
ㄷ.의 반례 : $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$
ㄹ.의 반례 : $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1$
따라서, 옳은 것은 ⑤ 없다.

5. $x, y > 0$ 이고 $3\sqrt{2x} \times \sqrt{3x} \times \sqrt{6} = 126$, $2\sqrt{7} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{y} = 84$ 일 때, 상수 $\frac{1}{x} \times y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2x} \times \sqrt{3x} \times \sqrt{6} &= \sqrt{9 \times 2x \times 3x \times 6} \\ &= \sqrt{18 \times 18 \times x^2} \\ &= 18x \end{aligned}$$

$$18x = 126$$

$$\therefore x = 7$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{7} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{y} &= \sqrt{2^2 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times y} \\ &= \sqrt{6^2 \times 14 \times y} \\ &= 6\sqrt{14y} \end{aligned}$$

$$6\sqrt{14y} = 84$$

$$\sqrt{14y} = 14, y = 14$$

$$\therefore \frac{1}{x} \times y = \frac{1}{7} \times 14 = 2$$

6. $x = \sqrt{5+3\sqrt{2}}, y = \sqrt{5-3\sqrt{2}}$ 일 때, $x^4 + y^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 86

해설

$$x^2 = 5 + 3\sqrt{2}, y^2 = 5 - 3\sqrt{2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 10, x^2 y^2 = 7$$

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = 100$$

$$\text{따라서 } x^4 + y^4 = 100 - 2x^2 y^2 = 100 - 14 = 86 \text{ 이다.}$$

7. 다음 보기의 A, B, C, D, E 에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구하여라.

보기

㉠ $\sqrt{75} = A\sqrt{3}$

㉡ $\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3} = B\sqrt{3}$

㉢ $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = C\sqrt{3}$

㉣ $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = D\sqrt{3}$

㉤ $\sqrt{0.21} \div \sqrt{7} = E\sqrt{3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

㉠ $\sqrt{5 \times 5 \times 3} = 5\sqrt{3} \therefore A = 5$

㉡ $\sqrt{10^2 \times 3} = 10\sqrt{3} \therefore B = 10$

㉢ $7\sqrt{3} \therefore C = 7$

㉣ $\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{6}{6}\sqrt{3} = \sqrt{3} \therefore D = 1$

㉤ $\sqrt{\frac{21}{100} \times \frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{3} \therefore E = 0.1$

가장 큰 수 : 10, 가장 작은 수 : 0.1

$\therefore 10 \times 0.1 = 1$

8. 다음 보기의 A, B, C, D, E 에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은?

보기

㉠ $\sqrt{75} = A\sqrt{3}$

㉡ $\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3} = B\sqrt{3}$

㉢ $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = C\sqrt{3}$

㉣ $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = D\sqrt{3}$

㉤ $\sqrt{0.21} \div \sqrt{7} = E\sqrt{3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

㉠ $\sqrt{5 \times 5 \times 3} = 5\sqrt{3}, \therefore A = 5$

㉡ $\sqrt{10^2 \times 3} = 10\sqrt{3}, \therefore B = 10$

㉢ $7\sqrt{3}, \therefore C = 7$

㉣ $\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{6}{6}\sqrt{3} = \sqrt{3}, \therefore D = 1$

㉤ $\sqrt{\frac{21}{100} \times \frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{3}, \therefore E = 0.1$

가장 큰 수 : 10, 가장 작은 수 : 0.1

$\therefore 10 \times 0.1 = 1$

9. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 의 소수 부분을 b 라고 할 때,
 $2a+3b$ 의 값을 구하면? (단, $0 < b < 1$)

① $\sqrt{3}-3$

② $2\sqrt{3}-1$

③ $2\sqrt{3}-3$

④ $3\sqrt{3}-1$

⑤ $3\sqrt{3}-3$

해설

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \text{ 이므로 } a = 0 \quad \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$b = \sqrt{3}-1$$

$$2a+3b = 3(\sqrt{3}-1) = 3\sqrt{3}-3$$

10. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ 의 분모를 유리화하면, $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}}{d}$ 이다. 이 때,

$a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = t$ 라 하면,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5} + t} &= \frac{\sqrt{5} - t}{(\sqrt{5} + t)(\sqrt{5} - t)} = \frac{\sqrt{5} - t}{5 - t^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{5 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{5 - (5 + 2\sqrt{6})} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{-2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{30} - \sqrt{12} - \sqrt{18}}{-12} \\ &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}}{d}\end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c + d = 30 + 12 + 18 - 12 = 48$$

11. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 의 소수 부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(175) - 2f(28) = a\sqrt{7} + b$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} \text{i) } & 13 < \sqrt{175} = 5\sqrt{7} < 14 \\ \therefore & f(175) = 5\sqrt{7} - 13 \\ \text{ii) } & 5 < \sqrt{28} = 2\sqrt{7} < 6 \\ \therefore & f(28) = 2\sqrt{7} - 5 \\ \therefore & f(175) - 2f(28) = 5\sqrt{7} - 13 - 4\sqrt{7} + 10 \\ & = \sqrt{7} - 3 \\ & \sqrt{7} - 3 = a\sqrt{7} + b \text{ 이므로} \\ & a = 1, b = -3 \\ \therefore & ab = 1 \times (-3) = -3 \end{aligned}$$

12. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 의 소수 부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(75) - f(48)$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{2} - 1$

③ $\sqrt{2} - 3$

④ $\sqrt{3} - 1$

⑤ $\sqrt{3} - 2$

해설

$\sqrt{75} = 8.\dots$ 이므로 정수 부분은 8, 소수 부분은 $\sqrt{75} - 8 = 5\sqrt{3} - 8$ 이다.

$\sqrt{48} = 6.\dots$ 이므로 정수 부분은 6, 소수 부분은 $\sqrt{48} - 6 = 4\sqrt{3} - 6$ 이다.

$\therefore f(75) - f(48)$

$= (5\sqrt{3} - 8) - (4\sqrt{3} - 6) = \sqrt{3} - 2$ 이다.

13. $\sqrt{(-4)^2}$ 의 음의 제곱근을 a , $12\sqrt{6\sqrt{576}}$ 의 양의 제곱근을 b 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -24$

해설

$$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = (\pm 2)^2$$

$$\therefore a = -2$$

$$\begin{aligned} 12\sqrt{6\sqrt{576}} &= 12\sqrt{6 \times 24} \\ &= 12 \times 12 \\ &= 144 \\ &= (\pm 12)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 12$$

$$\therefore ab = (-2) \cdot 12 = -24$$

14. 3의 음의 제곱근과 양의 제곱근을 각각 a, b 라 할 때, 다음 식을 계산하여라.

$$\sqrt{\sqrt{9(a^2b^2)^3} - \sqrt{5a^2 - 2b^2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$a = -\sqrt{3}, b = \sqrt{3} \text{ 이므로,}$$

$$\sqrt{\sqrt{9(a^2b^2)^3} - \sqrt{5a^2 - 2b^2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{9\{(-\sqrt{3})^2(\sqrt{3})^2\}^3} - \sqrt{5(-\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})^2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{9^4} - \sqrt{15 - 6}} = 9 - 3 = 6$$

15. 다음을 간단히 하여라.

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(-7-\sqrt{3})^2}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}-2 < 0$, $-7-\sqrt{3} < 0$ 이므로

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(-7-\sqrt{3})^2}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{(2-\sqrt{3}) + (7+\sqrt{3})}} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$$

16. $a - 3b < 2(a - 2b)$ 일 때, $\sqrt{(a - b)^2} + \sqrt{(b - a)^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2a - 2b$

해설

$a - 3b < 2(a - 2b)$ 에서 $a > b$ 이므로,
 $\sqrt{(a - b)^2} + \sqrt{(b - a)^2} = a - b - b + a = 2a - 2b$

17. $\sqrt{\frac{12x}{y}}$ 가 자연수가 되게 하는 자연수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\sqrt{\frac{12x}{y}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 3 \times x}{y}}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x, y 는 다음과 같다.

분모 y 는 $2^2 \times 3 \times x$ 의 약수가 되어야 하므로

$y = 1$ 일 때, x 는 $3 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이므로 최솟값은 $3 \times 1^2 = 3$ 이다. $\therefore x + y = 3 + 1 = 4$

$y = 2$ 일 때, x 는 $2 \times 3 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이므로 최솟값은 $2 \times 3 \times 1^2 = 6$ 이다. $\therefore x + y = 6 + 2 = 8$

$y = 3$ 일 때, x 는 $(\text{자연수})^2$ 꼴이므로 최솟값은 $1^2 = 1$ 이다. $\therefore x + y = 1 + 3 = 4$

y 가 1, 2, 3 이외의 자연수일 때, $x + y \geq 7$ ($y = 4$ 일 때, $x = 3$) 이다.

따라서 $x + y$ 의 최솟값은 4 이다.

18. 연속된 세 자연수 a, b, c 에 대하여, $\sqrt{a+b+c}$ 의 값이 자연수가 되기 위한 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하여라. (단, $a+b+c \leq 80$)

▶ 답: 개

▶ 정답 : 2개

해설

a, b, c 가 연속된 세 자연수이므로 $a = b - 1, c = b + 1$ 이다.

이때, $\sqrt{a+b+c} = \sqrt{3b}$ 가 자연수이므로

$$b = 3k^2 \text{ (} k \text{ 는 자연수)}$$
$$a + b + c \leq 80 \text{ 이므로 } 3b = 9k^2 \leq 80$$
$$k^2 < \frac{80}{9} = 8.888\ldots \therefore k = 1, 2$$

따라서 조건을 만족하는 세 수 (a, b, c) 의 쌍은 $(2, 3, 4), (11, 12, 13)$ 의 2 쌍이다.

19. $4 < \sqrt{a+2b} < 5$ 를 만족하는 3 의 배수 a 와 소수 b 에 대하여 순서쌍 (a, b) 는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 10 개

해설

$4 < \sqrt{a+2b} < 5$ 에서 각 변을 제곱하면 $16 < a+2b < 25$

b 는 소수이므로

$b = 2$ 일 때, $12 < a < 21$ 이고 a 는 3 의 배수이므로 $a = 15, 18$

$b = 3$ 일 때, $10 < a < 19$ 이고 a 는 3 의 배수이므로 $a = 12, 15, 18$

$b \equiv 5$ 일 때, $6 \leq a \leq 15$ 이고 a 는 3 의 배수이므로 $a \equiv 9, 12$

$b = 7$ 일 때, $0 < a < 11$ 이므로 a 는 3의 배수이므로 $a = 3, 6, 9$

$b = 7$ 일 때, $2 < a < 11$ a 는 3 의 배수이므로 $a = 3, 6, 9$

$b \geq 11$ 인 소수일 때, 주어진 조건을 만족하는 a 는 없다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $2 + 3 + 2 + 3 = 10$ (개) 이다.

20. 부등식을 만족하는 정수 x 의 개수가 가장 많은 것을 골라라.

보기

㉠ $1 < \sqrt{5-3x} < 4$

㉡ $2 < \sqrt{1-x} < \sqrt{7}$

㉢ $-1 < \sqrt{2x-3} < 2$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $1 < \sqrt{5-3x} < 4$

각 변을 제곱하면 $1 < 5-3x < 16$ 이므로

$5-3x \geq 0$ 일 때, $1 < 5-3x < 16$ 이므로 이를 만족하는 $x = -3, -2, -1, 0, 1$

$5-3x < 0$ 일 때, $1 < -5+3x < 16$ 이므로 이를 만족하는 $x = 3, 4, 5, 6$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 9 개이다.

㉡ $2 < \sqrt{1-x} < \sqrt{7}$

각 변을 제곱하면 $4 < 1-x < 7$ 이므로

$1-x \geq 0$ 일 때, $4 < 1-x < 7$ 이므로 이를 만족하는 $x = -5, -4$

$1-x < 0$ 일 때, $4 < -1+x < 7$ 이므로 이를 만족하는 $x = 6, 7$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 4 개이다.

㉢ $-1 < \sqrt{2x-3} < 2$

각 변을 제곱하면 $1 < 2x-3 < 4$ 이므로

$2x-3 \geq 0$ 일 때, $1 < 2x-3 < 4$ 이므로 이를 만족하는 $x = 3$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 2 개이다.

그러므로 답은 ㉠ 이다.

21. $\sqrt{19} < \sqrt{5x} < \sqrt{699}$ 를 만족하는 x 의 값 중에서 $\sqrt{5x}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 5 개

해설

 $\sqrt{19}$ 과 $\sqrt{699}$ 사이의 자연수 :
$$\sqrt{5^2}, \sqrt{6^2}, \sqrt{7^2}, \sqrt{8^2}, \dots, \sqrt{24^2}, \sqrt{25^2}, \sqrt{26^2}$$

이 중에서 5의 배수는

$$\sqrt{5^2}, \sqrt{10^2}, \sqrt{15^2}, \sqrt{20^2}, \sqrt{25^2}$$

∴ 5개

22. 두 수 6 과 8 사이에 있는 무리수 중에서 $\sqrt{n}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 가장 큰 수를 $\sqrt{a}$, 가장 작은 수를 $\sqrt{b}$ 라고 할 때, $\sqrt{a-b}$ 를 구하여라. (단, n 은 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{26}$

해설

$$\begin{aligned} 6 &= \sqrt{36}, \quad 8 = \sqrt{64}, \\ \sqrt{a} &= \sqrt{63}, \quad a = 63, \\ \sqrt{b} &= \sqrt{37}, \quad b = 37, \\ \sqrt{a-b} &= \sqrt{63-37} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

23. 정육면체 A, B의 겹넓이 비가 $4:9$ 이고, 두 정육면체의 부피의 합이 280 cm^3 일 때, A, B의 한 모서리의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답 : cm

▶ 답 : cm

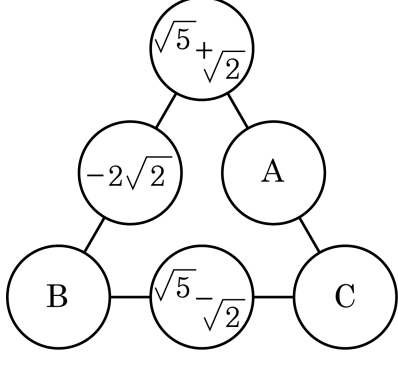
▷ 정답 : $A = 4\text{ cm}$

▷ 정답 : $B = 6\text{ cm}$

해설

A, B의 한 모서리의 길이를 각각 $a\text{ cm}$, $b\text{ cm}$ 라고 하면
A, B의 겹넓이의 비는 $6a^2 : 6b^2 = 4 : 9$ 이므로 $a : b = 2 : 3$
 $\therefore b = \frac{3}{2}a$
A, B의 부피의 합은 $a^3 + b^3 = 280$,
 $a^3 + \left(\frac{3}{2}a\right)^3 = 280$, $a^3 = 64$,
 $\therefore a = 4, b = 6$
따라서 A, B의 한 모서리의 길이는 각각 4 cm , 6 cm 이다.

24. 다음 그림에서 삼각형의 각 변에 있는 수의 합은 모두 같다고 할 때, $A - B + C$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $-2\sqrt{2}$

해설

$B - 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{2} = B + C + \sqrt{5} - \sqrt{2}$ 에서
 $\therefore C = 0$
 $\sqrt{5} + \sqrt{2} + A = \sqrt{5} - \sqrt{2} + B$ 에서
 $\therefore A - B = -2\sqrt{2}$
 $\therefore A - B + C = -2\sqrt{2}$

25. 양의 무리수 a 의 소수부분을 b 라 하면 $a^2 + b^2 = 7$ 이다. 이 때, a 의 정수부분을 구하여라. (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$0 < b < 1$ 이므로 $0 < b^2 < 1$
 $6 < 7 - b^2 < 7$ 이므로 $6 < a^2 < 7$
따라서, $2 < \sqrt{6} < a < \sqrt{7} < 3$ 이므로 a 의 정수부분은 2 이다.