1. $a<0$ 일 때, $\sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2$ 을 계산하면?

① $0.1a^2-3$ ② $0.1a^2+3$ ③ $0.5a^2-3$

④ $0.5a^2+3$ ⑤ a^2-3

해설

$$\sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2$$

$$= -9a \times \left(-\frac{1}{3a}\right) + (-0.5a) \times \left(-\frac{1}{5}a\right)$$

$$= 3 + 0.1a^2$$

2. $3x-y=12$ 일 때, $\sqrt{5x+y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$3x-y=12 \;\Rightarrow\; y=3x-12$

$\sqrt{5x+y}=\sqrt{5x+3x-12}=\sqrt{8x-12}$

$\sqrt{8x-12}=1 \;\Rightarrow\; 8x-12=1,\; x=\dfrac{13}{8}$

(x 는 자연수가 아니다.)

$\sqrt{8x-12}=2 \;\Rightarrow\; 8x-12=4,\; x=2$

따라서 $x=2$ 이다.

3. $0 < a < 1$ 일 때, 다음 중 가장 큰 값은?

① a^2 ② $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$ ③ $\sqrt{a}$

④ $\sqrt{(-a)^2}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$0 < a < 1$ 일 때 $a = \frac{1}{4}$ 라 하면

① $a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

② $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \sqrt{16} = 4$

③ $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

④ $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

4. 다음 중에서 옳은 설명을 모두 고른 것은?

> 모든 무리수 x, y 에 대하여
> ㄱ. $x+y$ 는 항상 무리수이다.
> ㄴ. $x-y$ 는 항상 무리수이다.
> ㄷ. $x\times y$ 는 항상 무리수이다.
> ㄹ. $x\div y$ 는 항상 무리수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ 없다

해설

ㄱ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$
ㄴ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$
ㄷ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2$
ㄹ.의 반례 : $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 라 하면 $\sqrt{2}\div\sqrt{2}=1$
따라서, 옳은 것은 ⑤ 없다.

5. $x,\ y > 0$이고 $3\sqrt{2x} \times \sqrt{3x} \times \sqrt{6} = 126,\ 2\sqrt{7} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{y} = 84$ 일 때, 상수 $\frac{1}{x} \times y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$3\sqrt{2x} \times \sqrt{3x} \times \sqrt{6} = \sqrt{9 \times 2x \times 3x \times 6}$$
$$= \sqrt{18 \times 18 \times x^2}$$
$$= 18x$$

$18x = 126$

$\therefore x = 7$

$$2\sqrt{7} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{y} = \sqrt{2^2 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times y}$$
$$= \sqrt{6^2 \times 14 \times y}$$
$$= 6\sqrt{14y}$$

$6\sqrt{14y} = 84$

$\sqrt{14y} = 14,\ y = 14$

$\therefore \frac{1}{x} \times y = \frac{1}{7} \times 14 = 2$

6. $x = \sqrt{5+3\sqrt{2}}, y = \sqrt{5-3\sqrt{2}}$ 일 때, $x^4 + y^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 86

해설

$x^2 = 5+3\sqrt{2}$, $y^2 = 5-3\sqrt{2}$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 10$, $x^2y^2 = 7$

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 = 100$

따라서 $x^4 + y^4 = 100 - 2x^2y^2 = 100 - 14 = 86$ 이다.

7. 다음 보기의 A, B, C, D, E 에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구하여라.

보기

㉠ $\sqrt{75} = \mathrm{A}\sqrt{3}$

㉡ $\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3} = \mathrm{B}\sqrt{3}$

㉢ $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \mathrm{C}\sqrt{3}$

㉣ $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \mathrm{D}\sqrt{3}$

㉤ $\sqrt{0.21} \div \sqrt{7} = \mathrm{E}\sqrt{3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

㉠ $\sqrt{5 \times 5 \times 3} = 5\sqrt{3} \quad \therefore\ \mathrm{A} = 5$

㉡ $\sqrt{10^2 \times 3} = 10\sqrt{3} \quad \therefore\ \mathrm{B} = 10$

㉢ $7\sqrt{3} \quad \therefore \mathrm{C} = 7$

㉣ $\dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{6}{6}\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \therefore\ \mathrm{D} = 1$

㉤ $\sqrt{\dfrac{21}{100} \times \dfrac{1}{7}} = \sqrt{\dfrac{3}{100}} = \dfrac{1}{10}\sqrt{3} \quad \therefore\ \mathrm{E} = 0.1$

가장 큰 수 : 10, 가장 작은 수 : 0.1

$\therefore\ 10 \times 0.1 = 1$

8. 다음 보기의 A, B, C, D, E 에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은?

보기

㉠ $\sqrt{75} = \mathrm{A}\sqrt{3}$

㉡ $\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3} = \mathrm{B}\sqrt{3}$

㉢ $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \mathrm{C}\sqrt{3}$

㉣ $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \mathrm{D}\sqrt{3}$

㉤ $\sqrt{0.21} \div \sqrt{7} = \mathrm{E}\sqrt{3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

㉠ $\sqrt{5 \times 5 \times 3} = 5\sqrt{3}, \quad \therefore \ \mathrm{A} = 5$

㉡ $\sqrt{10^2 \times 3} = 10\sqrt{3}, \quad \therefore \ \mathrm{B} = 10$

㉢ $7\sqrt{3}, \quad \therefore \mathrm{C} = 7$

㉣ $\dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{6}{6}\sqrt{3} = \sqrt{3}, \quad \therefore \ \mathrm{D} = 1$

㉤ $\sqrt{\dfrac{21}{100} \times \dfrac{1}{7}} = \sqrt{\dfrac{3}{100}} = \dfrac{1}{10}\sqrt{3}, \quad \therefore \ \mathrm{E} = 0.1$

가장 큰 수 : 10, 가장 작은 수 : 0.1

$\therefore \ 10 \times 0.1 = 1$

9. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a, $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 의 소수 부분을 b 라고 할 때, $2a+3b$ 의 값을 구하면? (단, $0<b<1$)

① $\sqrt{3}-3$ ② $2\sqrt{3}-1$ ③ $2\sqrt{3}-3$

④ $3\sqrt{3}-1$ ⑤ $3\sqrt{3}-3$

해설

$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ 이므로 $a=0$ $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ 이므로

$b=\sqrt{3}-1$

$2a+3b=3(\sqrt{3}-1)=3\sqrt{3}-3$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 의 분모를 유리화하면, $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}{d}$ 이다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=t$ 라 하면,

$$\frac{1}{\sqrt{5}+t}=\frac{\sqrt{5}-t}{(\sqrt{5}+t)(\sqrt{5}-t)}=\frac{\sqrt{5}-t}{5-t^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5-(5+2\sqrt{6})}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{30}-\sqrt{12}-\sqrt{18}}{-12}$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}{d}$$

$\therefore\ a+b+c+d=30+12+18-12=48$

11. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 의 소수 부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(175) - 2f(28) = a\sqrt{7} + b$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① -5　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

i) $13 < \sqrt{175} = 5\sqrt{7} < 14$

$\therefore f(175) = 5\sqrt{7} - 13$

ii) $5 < \sqrt{28} = 2\sqrt{7} < 6$

$\therefore f(28) = 2\sqrt{7} - 5$

$$\therefore f(175) - 2f(28) = 5\sqrt{7} - 13 - 4\sqrt{7} + 10$$
$$= \sqrt{7} - 3$$

$\sqrt{7} - 3 = a\sqrt{7} + b$ 이므로

$a = 1, b = -3$

$\therefore ab = 1 \times (-3) = -3$

12. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 의 소수 부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(75)-f(48)$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{2}-1$　③ $\sqrt{2}-3$

④ $\sqrt{3}-1$　⑤ $\sqrt{3}-2$

해설

$\sqrt{75}=8.\cdots$ 이므로 정수 부분은 8, 소수 부분은 $\sqrt{75}-8=5\sqrt{3}-8$ 이다.

$\sqrt{48}=6.\cdots$ 이므로 정수 부분은 6, 소수 부분은 $\sqrt{48}-6=4\sqrt{3}-6$ 이다.

$\therefore f(75)-f(48)$

$=(5\sqrt{3}-8)-(4\sqrt{3}-6)=\sqrt{3}-2$ 이다.

13. $\sqrt{(-4)^2}$ 의 음의 제곱근을 a, $12\sqrt{6\sqrt{576}}$ 의 양의 제곱근을 b 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -24$

해설

$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = (\pm 2)^2$

$\therefore\ a = -2$

$$\begin{aligned} 12\sqrt{6\sqrt{576}} &= 12\sqrt{6 \times 24} \\ &= 12 \times 12 \\ &= 144 \\ &= (\pm 12)^2 \end{aligned}$$

$\therefore\ b = 12$

$\therefore\ ab = (-2) \cdot 12 = -24$

14. 3 의 음의 제곱근과 양의 제곱근을 각각 a, b 라 할 때, 다음 식을 계산하여라.

$$\sqrt{\sqrt{9(a^2b^2)^3}}-\sqrt{5a^2-2b^2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$a=-\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$ 이므로,

$\sqrt{\sqrt{9(a^2b^2)^3}}-\sqrt{5a^2-2b^2}$

$=\sqrt{\sqrt{9\left\{(-\sqrt{3})^2(\sqrt{3})^2\right\}^3}}-\sqrt{5(-\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{\sqrt{9^4}}-\sqrt{15-6}=9-3=6$

15. 다음을 간단히 하여라.

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(-7-\sqrt{3})^2}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}-2<0$, $-7-\sqrt{3}<0$ 이므로

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(-7-\sqrt{3})^2}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{(2-\sqrt{3})+(7+\sqrt{3})}}=\sqrt{\sqrt{9}}=\sqrt{3}$$

16. $a-3b<2(a-2b)$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2a-2b$

해설

$a-3b<2(a-2b)$ 에서 $a>b$ 이므로,

$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-a)^2}=a-b-b+a=2a-2b$

17. $\sqrt{\dfrac{12x}{y}}$ 가 자연수가 되게 하는 자연수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\sqrt{\dfrac{12x}{y}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \times 3 \times x}{y}}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x, y 는 다음과 같다.
분모 y 는 $2^2 \times 3 \times x$ 의 약수가 되어야 하므로
$y = 1$ 일 때, x 는 $3 \times$(자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $3 \times 1^2 = 3$ 이다. $\therefore x + y = 3 + 1 = 4$
$y = 2$ 일 때, x 는 $2\times3\times$(자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $2\times3\times1^2 = 6$ 이다. $\therefore x + y = 6 + 2 = 8$
$y = 3$ 일 때, x 는 (자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $1^2 = 1$ 이다. $\therefore x + y = 1 + 3 = 4$
y 가 1, 2, 3 이외의 자연수일 때, $x + y \geq 7$ ($y = 4$ 일 때, $x = 3$) 이다.
따라서 $x + y$ 의 최솟값은 4 이다.

18. 연속된 세 자연수 $a,\ b,\ c$에 대하여, $\sqrt{a+b+c}$의 값이 자연수가 되기 위한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하여라. (단, $a+b+c \le 80$)

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 2 개

해설

$a,\ b,\ c$ 가 연속된 세 자연수이므로 $a=b-1,\ c=b+1$이다.

이때, $\sqrt{a+b+c} = \sqrt{3b}$가 자연수이므로

$b=3k^2$ (k 는 자연수)

$a+b+c \le 80$ 이므로 $3b = 9k^2 \le 80$

$k^2 < \dfrac{80}{9} = 8.888\cdots \ \therefore k=1,\ 2$

따라서 조건을 만족하는 세 수 $(a,\ b,\ c)$의 쌍은

$(2,\ 3,\ 4),\ (11,\ 12,\ 13)$ 의 2 쌍이다.

19. $4 < \sqrt{a+2b} < 5$ 를 만족하는 3 의 배수 a 와 소수 b 에 대하여 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ **답 :** ______개

▷ **정답 :** 10 개

해설

$4 < \sqrt{a+2b} < 5$ 에서 각 변을 제곱하면 $16 < a+2b < 25$
b 는 소수이므로
$b=2$ 일 때, $12 < a < 21$ 이고 a 는 3 의 배수이므로 $a=15, 18$
$b=3$ 일 때, $10 < a < 19$ 이고 a 는 3 의 배수이므로 $a=12, 15, 18$
$b=5$ 일 때, $6 < a < 15$ 이고 a 는 3 의 배수이므로 $a=9, 12$
$b=7$ 일 때, $2 < a < 11$ a 는 3 의 배수이므로 $a=3, 6, 9$
$b \geq 11$ 인 소수일 때, 주어진 조건을 만족하는 a 는 없다.
따라서 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는 $2+3+2+3=10$ (개) 이다.

20. 부등식을 만족하는 정수 x 의 개수가 가장 많은 것을 골라라.

보기

㉠ $1 < \sqrt{|5-3x|} < 4$ ㉡ $2 < \sqrt{|1-x|} < \sqrt{7}$

㉢ $-1 < \sqrt{|2x-3|} < 2$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $1 < \sqrt{|5-3x|} < 4$

각 변을 제곱하면 $1 < |5-3x| < 16$ 이므로

$5-3x \geq 0$ 일 때, $1 < 5-3x < 16$ 이므로 이를 만족하는 $x = -3, -2, -1, 0, 1$

$5-3x < 0$ 일 때, $1 < -5+3x < 16$ 이므로 이를 만족하는 $x = 3, 4, 5, 6$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 9 개이다.

㉡ $2 < \sqrt{|1-x|} < \sqrt{7}$

각 변을 제곱하면 $4 < |1-x| < 7$ 이므로

$1-x \geq 0$ 일 때, $4 < 1-x < 7$ 이므로 이를 만족하는 $x = -5, \ -4$

$1-x < 0$ 일 때, $4 < -1+x < 7$ 이므로 이를 만족하는 $x = 6, \ 7$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 4 개이다.

㉢ $-1 < \sqrt{|2x-3|} < 2$

각 변을 제곱하면 $1 < |2x-3| < 4$이므로

$2x-3 \geq 0$일 때, $1 < 2x-3 < 4$이므로 이를 만족하는 $x = 3$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 2개이다.

그러므로 답은 ㉠ 이다.

21. $\sqrt{19} < \sqrt{5x} < \sqrt{699}$ 를 만족하는 x 의 값 중에서 $\sqrt{5x}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$\sqrt{19}$ 과 $\sqrt{699}$ 사이의 자연수 :

$\sqrt{5^2}$, $\sqrt{6^2}$, $\sqrt{7^2}$, $\sqrt{8^2}$, $\cdots$, $\sqrt{24^2}$, $\sqrt{25^2}$, $\sqrt{26^2}$

이 중에서 5 의 배수는

$\sqrt{5^2}$, $\sqrt{10^2}$, $\sqrt{15^2}$, $\sqrt{20^2}$, $\sqrt{25^2}$

$\therefore$ 5 개

22. 두 수 6 과 8 사이에 있는 무리수 중에서 $\sqrt{n}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 가장 큰 수를 $\sqrt{a}$, 가장 작은 수를 $\sqrt{b}$ 라고 할 때, $\sqrt{a-b}$ 를 구하여라. (단, n 은 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{26}$

해설

$6=\sqrt{36},\ 8=\sqrt{64}$,

$\sqrt{a}=\sqrt{63},\ a=63$,

$\sqrt{b}=\sqrt{37},\ b=37$,

$\sqrt{a-b}=\sqrt{63-37}=\sqrt{26}$

23. 정육면체 A, B의 겉넓이 비가 $4:9$이고, 두 정육면체의 부피의 합이 $280\,\mathrm{cm}^3$일 때, A, B의 한 모서리의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답 : ________ cm

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : $A = 4$ cm

▷ 정답 : $B = 6$ cm

해설

A, B의 한 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm라고 하면

A, B의 겉넓이의 비는 $6a^2 : 6b^2 = 4 : 9$ 이므로 $a : b = 2 : 3$

$\therefore b = \frac{3}{2}a$

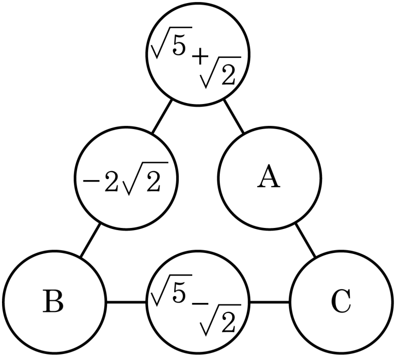
A, B의 부피의 합은 $a^3 + b^3 = 280$,

$a^3 + \left(\frac{3}{2}a\right)^3 = 280,\ a^3 = 64,$

$\therefore a = 4, b = 6$

따라서 A, B의 한 모서리의 길이는 각각 4 cm, 6 cm이다.

24. 다음 그림에서 삼각형의 각 변에 있는 수의 합은 모두 같다고 할 때, $A-B+C$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $-2\sqrt{2}$

해설

$B-2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}=B+C+\sqrt{5}-\sqrt{2}$에서

$\therefore\ C=0$

$\sqrt{5}+\sqrt{2}+A=\sqrt{5}-\sqrt{2}+B$에서

$\therefore\ A-B=-2\sqrt{2}$

$\therefore\ A-B+C=-2\sqrt{2}$

25. 양의 무리수 a 의 소수부분을 b 라 하면 $a^2+b^2=7$ 이다. 이 때, a 의 정수부분을 구하여라. (단,$b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$0 < b < 1$ 이므로 $0 < b^2 < 1$
$6 < 7 - b^2 < 7$ 이므로 $6 < a^2 < 7$
따라서, $2 < \sqrt{6} < a < \sqrt{7} < 3$ 이므로 a 의 정수부분은 2 이다.