

1. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ① 순환하는 무한소수는 반드시 유리수이다.
- ② 서로 다른 두 무리수 사이에는 적어도 하나 이상의 자연수가 존재한다.
- ③ 반지름의 길이가 0 이 아닌 실수인 원의 넓이는 반드시 무리수이다.
- ④ 완전제곱수의 제곱근은 항상 유리수이다.
- ⑤ 서로 다른 두 무리수의 곱은 항상 무리수이다.

해설

- ② $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에는 자연수가 존재하지 않는다.
 - ⑤ $\sqrt{2}$ 와 $-\sqrt{2}$ 의 곱은 유리수이다.
- 따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다.

2. $\sqrt{18}+3$ 과 $\sqrt{15}-2$ 중 큰 수를 a , $2\sqrt{7}$ 과 $3\sqrt{2}-1$ 중 작은 수를 b 라고 할 때, $b-a$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 2 ③ 0 ④ -2 ⑤ -4

해설

① $\sqrt{18}+3-(\sqrt{15}-2)=\sqrt{18}+3-\sqrt{15}+2>0$
 $\therefore \sqrt{18}+3>\sqrt{15}-2$
② $2\sqrt{7}-(3\sqrt{2}-1)=2\sqrt{7}-3\sqrt{2}+1=\sqrt{28}-\sqrt{18}+1>0$
 $\therefore 2\sqrt{7}>3\sqrt{2}-1$
 $\therefore a=\sqrt{18}+3=3\sqrt{2}+3, b=3\sqrt{2}-1$
 $b-a=3\sqrt{2}-1-(3\sqrt{2}+3)=-4$ 이다.

3. $\sqrt{18}$ 의 소수 부분을 a , $2\sqrt{5}$ 의 정수 부분을 b 라 할 때,
 $\frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2}{a - b}$ 의 값을 구하면?

① 13 ② 15 ③ 18 ④ 20 ⑤ 24

해설

$$4 < \sqrt{18} < 5 \text{ 이므로 } a = \sqrt{18} - 4$$

$$4 < \sqrt{20} < 5 \text{ 이므로 } b = 4$$

$$a + b = \sqrt{18}$$

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2)}{a(a + b)(a - b) + b(a + b)(a - b)} \\ &= \frac{(a - b)(a + b)^2 - b}{a - b} \\ &= (a + b)^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

4. 이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 해가 정수일 때, 자연수 a 의 값 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x^2 - 8x + a = 0$ 의 해 $x = 4 \pm \sqrt{16 - a}$ 가 정수이기 위해서는 근호 안의 수가 제곱수이어야 한다.

a 는 자연수이므로 $0 \leq 16 - a < 16$

$16 - a = 0, 1, 4, 9$

$\therefore a = 7, 12, 15, 16$

따라서 가장 큰 수는 $a = 16$ 이다.

5. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$ 의 근의 개수가 1개일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$ 은 중근을 갖는다.

$$3x^2 - 6x + k + 2 = 0$$

$$3(x^2 - 2x) = -k - 2$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = -k - 2 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = -k + 1$$

중근을 가져야 하므로 $-k + 1 = 0$

$$\therefore k = 1$$

6. 다음 이차방정식이 중근을 가질 때 $k, k+5$ 를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은? (단, $k < 0$)

$2x^2 + kx + 8 = 0$

- ① $x^2 - 11x + 24 = 0$

② $x^2 + 11x + 24 = 0$

③ $x^2 - 11x - 24 = 0$

④ $x^2 + 11x - 24 = 0$

⑤ $x^2 + 5x - 12 = 0$

해설

$k^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0, k = \pm 8$
 $k < 0$ 이므로 $k = -8$
 $-8, -3$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은 $x^2 + 11x + 24 = 0$

7. 고속도로의 통행료를 $x\%$ 인상하면 요금을 올리기 전보다 통행료 수입이 78% 줄어들고, 통행 차량의 수도 $8x\%$ 줄어든다고 한다. 통행료의 요금 인상률 x 를 구하여라. (단, 단위는 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

인상 전의 입장요금을 A 원, 통행차량 수를 B 대 라 하면
인상 후의 통행료는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, 통행차량 수는
 $B\left(1 - \frac{8x}{100}\right)$ 대, 통행료 수입은 $A \times B \times \left(1 - \frac{78}{100}\right)$ 원
 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times B\left(1 - \frac{8x}{100}\right)$
 $= A \times B \times \left(1 - \frac{78}{100}\right)$ 이다.
 $\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{8x}{100}\right) = \left(1 - \frac{78}{100}\right)$
 $2x^2 + 175x - 1950 = 0$
 $(2x + 195)(x - 10) = 0$
 $x > 0$ 이므로 $x = 10$

8. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 $y = -\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프보다 폭이 좁고,
 $y = 2x^2$ 의 그래프보다 폭이 넓다고 할 때, 음수 a 의 값의 범위는?

- ① $-\frac{3}{2} < a < 2$ ② $-\frac{3}{2} < a < -2$ ③ $\frac{3}{2} < a < 2$
④ $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ⑤ $-2 < a < \frac{3}{2}$

해설

$$\frac{3}{2} < |a| < 2$$

$\frac{3}{2} < a < 2$ 또는 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이고, a 가 음수이므로 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이다.

9. 이차함수 $y = x^2 + ax - b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{b}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{4}$

해설

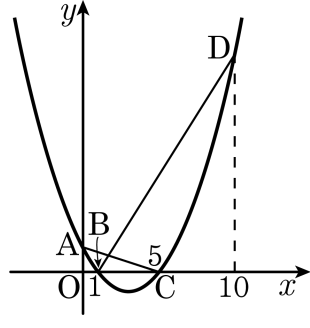
$$y = x^2 + ax - b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - b,$$

꼭짓점 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} - b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} - b = 0$,

$$b = -\frac{a^2}{4},$$

$$\therefore \frac{b}{a^2} = b \times \frac{1}{a^2} = -\frac{a^2}{4} \times \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

10. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD의 넓이를 구하면?



- ① 106 ② 107 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times c = 12 \text{ 이다.}$$

$$c = 6, \text{ 즉 } A(0, 6) \text{ 이다.}$$

$$y = ax^2 + bx + 6 = a(x - 1)(x - 5) = ax^2 - 6ax + 5a \text{ 이다.}$$

$$5a = 6, a = \frac{6}{5}, b = -\frac{36}{5} \text{ 이다.}$$

$$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6 \text{ 이므로 } D(10, 54) \text{ 이다.}$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times 54 = 108$$

11. $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 그래프의 x 절편과 y 절편을 연결한 삼각형의 넓이를 구하면?

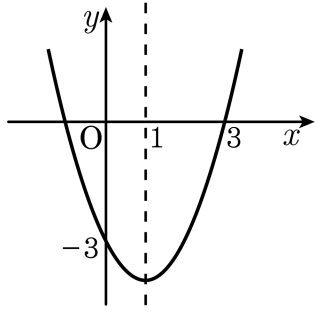
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$y = 2(x+3)^2 - 2 = 2x^2 + 12x + 16$ 에서 x 절편은 -4 와 -2 , y 절편은 16

따라서 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 16 = 16$ 이다.

12. 다음 그림은 직선 $x = 1$ 을 축으로 하는 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?



- ① -4 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$y = a(x - 1)^2 + q$
 $x = 0$ 일 때, $a + q = -3$ (1)
 $x = 3$ 일 때, $4a + q = 0$ (2)
(2)에서 (1)을 빼면, $3a = 3$
 $\therefore a = 1, q = -4$
 $y = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$
따라서 $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c = -4$ 이다.

13. $\sqrt{5} < x < \sqrt{A}$ 를 만족하는 정수 x 의 개수가 2개일 때, 이 식을 성립하게 하는 정수 A 는 모두 몇 개인가?

① 8 개 ② 9 개 ③ 10 개 ④ 11 개 ⑤ 12 개

해설

$\sqrt{5} < x < \sqrt{A}$ 를 만족하는 정수 x 가 2 개가 되려면 $4 < \sqrt{A} \leq 5$ 여야 하므로 $16 < A \leq 25$
 $A = 17, 18 \cdots 23, 24, 25$ 이므로 9 개이다.

14. $\frac{5-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{5-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \frac{(5-3\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}-9}{3} \\ &= -3 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$$-3 + \frac{5\sqrt{3}}{3} = a + b\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\therefore a = -3, b = \frac{5}{3}$$

$$\therefore ab = -5$$

15. $x = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} - 1$ 이고 유리수 a , b 에 대하여 $bx + ay = x + 2y$ 를 만족할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 2$

해설

주어진 식에 x , y 를 각각 대입하면

$$b(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) + a(\sqrt{2} - 1) = (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 2(\sqrt{2} - 1)$$

양변을 $\sqrt{2}$ 항과 $\sqrt{3}$ 항으로 각각 정리하면

$$(a + 3b)\sqrt{2} + \sqrt{3}b - a = 5\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$\therefore ab = 2$$

16. 일차방정식 $(\sqrt{3} + 1)x = (4 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)$ 의 해는 $x = a + b\sqrt{3}$ 이다. 이때, $\sqrt{a+b}$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수)

① 0 ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$$(\sqrt{3} + 1)x = (4 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(4 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 5}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{(2\sqrt{3} + 5)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서, } \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2}$$

17. 다항식 $(x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3) - 21$ 를 인수분해했을 때, 다음 중 인수인 것은?

- ① $x^2 - x + 1$ ② $x^2 + x - 1$ ③ $x^2 - 2x - 1$
④ $x^2 - x + 3$ ⑤ $x^2 - x + 9$

해설

$$\begin{aligned} & (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3) - 21 \\ &= (x + 2)(x - 2)(x - 3)(x + 1) - 21 \\ &= (x + 2)(x - 3)(x + 1)(x - 2) - 21 \\ &= (x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2) - 21 \\ & x^2 - x = A \text{ 로 놓으면} \\ & (A - 6)(A - 2) - 21 = A^2 - 8A + 12 - 21 \\ & \quad = A^2 - 8A - 9 \\ & \quad = (A - 9)(A + 1) \\ & \quad = (x^2 - x - 9)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

18. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대한 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{x^2}{(x-y)(z-x)} - \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(x-z)(z-y)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{(x-y)(z-x)} - \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(x-z)(z-y)} \\ &= \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{(y-z)x^2 - (y^2 - z^2)x + y^2z - yz^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{(y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\}}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

19. 인수분해 공식을 이용하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (5^2 - 6^2) + (7^2 - 8^2) + (9^2 - 10^2) \\&= (5 + 6)(5 - 6) + (7 + 8)(7 - 8) \\&\quad + (9 + 10)(9 - 10) \\&= -11 - 15 - 19 \\&= -45\end{aligned}$$

20. 이차방정식 $4x^2 - 8ax + 8a - 3b = 0$ 의 두 근이 일치할 때, a, b 의 값과 그 근의 합을 구하여라.

(단, a 는 $a \geq 1$ 인 유리수, b 는 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

중근을 갖는 것이므로,
 $(4a)^2 - 4(8a - 3b) = 0, \quad 4a^2 - 8a + 3b = 0$
 $\Rightarrow 4(a - 1)^2 = 4 - 3b, \quad 4 - 3b \geq 0$
따라서 b 는 양의 정수이므로 $b = 1$ 이다.

또한, $a \geq 1$ 이므로 $a = \frac{3}{2}$ 이다.

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b + x = \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 4$$

21. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근 p, q 가 p 는 약수가 2 개인 소수, q 는 홀수이고, $p^2 + q = 25$ 를 만족할 때, $\frac{b^2c + bc^2}{a^3}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -18354

해설

$p^2 = 25 - q$ 이고 q 가 홀수이므로 p^2 은 짝수이다.

즉 p 도 짝수이고 짝수인 소수는 2 뿐이므로 $p = 2$

$\therefore q = 21$

따라서 이차방정식은

$$a(x - 2)(x - 21) = ax^2 - 23ax + 42a = 0$$

$$\therefore b = -23a, c = 42a$$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{b^2c + bc^2}{a^3} &= \frac{bc(b + c)}{a^3} \\ &= \frac{-23a \times 42a \times (-23a + 42a)}{a^3} \\ &= (-23) \times 42 \times 19 \\ &= -18354\end{aligned}$$

22. $\frac{13}{5-2\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 m , 소수 부분을 n 이라 할 때, n 은 이차방정식 $\frac{m}{4}x^2 + ax - b = 0$ 의 한 근이다.
이때, 유리수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$\frac{13}{5-2\sqrt{3}} = 5 + 2\sqrt{3} = 8. \times \times \times$ 이므로 정수 부분 $m = 8$, 소수 부분 $n = -3 + 2\sqrt{3}$
 n 이 한 근이므로 $-3 - 2\sqrt{3}$ 도 한 근이다.
두 근의 합은 -6 , 두 근의 곱은 -3
 $\frac{m}{4}x^2 + ax - b = 0 \leftrightarrow 2x^2 + ax - b = 0$
 $a = 12, b = 6$
 $\therefore ab = 72$

23. 어떤 원의 반지름의 길이를 3 cm 만큼 줄였더니, 그 넓이는 처음 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 배가 되었다. 이때, 처음 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm ④ 6 cm ⑤ 7 cm

해설

처음 원의 반지름 : r

줄인 원의 반지름 : $r - 3$

$$\pi(r - 3)^2 = \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$r^2 - 6r + 9 = \frac{1}{4}r^2$$

$$\frac{3}{4}r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$r^2 - 8r + 12 = 0$$

$$(r - 2)(r - 6) = 0$$

$$\therefore r = 6 \text{ cm } (r > 3 \text{ 이므로})$$

24. 함수 $y = x^2 - q$, $y = -x^2 + q$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 21 일 때, q 의 값을 구하여라. (단, $q > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = 0$ 이므로 직사각형은 직선 $x = 0$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $-t, t$ 라 하면 가로 길이는 $2t$,

세로의 길이는 $(-t^2 + q) - (t^2 - q) = -2t^2 + 2q$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(-2t^2 + 2q + 2t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4q + 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $4q + 1 = 21$ 이므로 $q = 5$ 이다.

25. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\ &= \{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\} + 4m \\ &= \{x - (m+1)\}^2 - (m+1)^2 + 4m \\ \therefore \text{최솟값 } M &= -(m+1)^2 + 4m \\ &= -m^2 + 2m - 1 \\ &= -(m^2 - 2m + 1) \\ &= -(m-1)^2 \end{aligned}$$

따라서 a 의 최댓값은 0 이다.