1. 반지름의 길이의 비가 $1:3$ 인 두 원이 있다. 이 두 원의 넓이의 합이 $40\pi\mathrm{cm}^2$ 일 때, 작은 원의 반지름의 길이는 몇 cm 인가?

① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

작은 원의 반지름을 r 라고 하면, 큰 원의 반지름은 $3r$ 이다.
(두 원의 넓이의 합)$= \pi r^2 + \pi(3r)^2 = 10\pi r^2 = 40\pi\,\mathrm{cm}^2$
$r^2 = 4$
$\therefore\ r = 2\,\mathrm{cm}\ (\because r > 0)$

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-a)^2} = a$ 이다.

② $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-a)^2} = a$

③ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{16a^2} = 4a$ 이다.

④ $\sqrt{a^2} = |a|$ 이다.

⑤ $a < 0$ 일 때, $\sqrt{(3a)^2} = 3a$ 이다

해설

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-a)^2} = a$
② $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-a)^2} = -(-a) = a$
③ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{16a^2} = 4a$
④ a 의 부호와 관계없이 $\sqrt{a^2} = |a|$
⑤ $a < 0$ 일 때, $\sqrt{(3a)^2} = -3a$

3. $\sqrt{5}\times 3\sqrt{a}=15$, $\sqrt{3}\times\sqrt{b}=6$, $\sqrt{2.43}=c\sqrt{3}$ 일 때, 유리수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은?

① 60 ② 54 ③ $\frac{54}{5}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ 1

해설

$3\sqrt{a}=\frac{15}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{a}=\frac{15}{3\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\therefore a=5$

$\sqrt{b}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$

$\therefore b=12$

$\sqrt{\frac{243}{100}}=\frac{9\sqrt{3}}{10}=c\sqrt{3}$

$\therefore c=\frac{9}{10}$

$\therefore abc=5\times 12\times\frac{9}{10}=54$

4. $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 $N(x)$ 라고 하면 $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $N(5) = 2$ 이다. 이 때, $N(1) + N(2) + N(3) + \cdots + N(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 19

해설

$\sqrt{1} = 1,\ \sqrt{4} = 2,\ \sqrt{9} = 3$ 이므로
$N(1) = N(2) = N(3) = 1$
$N(4) = N(5) = \cdots = N(8) = 2$
$N(9) = N(10) = 3$
$\therefore N(1) + N(2) + N(3) + \cdots + N(10) = 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 2 = 19$

5. $ax^2+24x+b=(3x+c)^2$ 일 때, 상수 a, b, c 의 값을 차례로 구하면?

① $a=9,\ b=16,\ c=-4$
② $a=9,\ b=8,\ c=4$
③ $a=9,\ b=16,\ c=2$
④ $a=9,\ b=16,\ c=4$
⑤ $a=3,\ b=-8,\ c=4$

해설

$(3x+c)^2=9x^2+6cx+c^2$
$a=9$
$6c=24,\ c=4$
$b=c^2,\ b=16$
$\therefore a=9,\ b=16,\ c=4$

6. 다음 보기에서 각 식의 인수를 $ax+b$ 라 할 때, $a+b=3$ 인 인수 $ax+b$ 를 갖는 식을 모두 골라라.

보기

㉠ $2(3x+2)+(2x-1)(3x+2)$

㉡ $2x(2x+1)-3(1+2x)$

㉢ $(x+2)(x-1)-2(x+2)$

㉣ x^2-4x+4

㉤ $2x^2+7x+6$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

㉠ $2(3x+2)+(2x-1)(3x+2)=(3x+2)(2x+1)$
㉡ $2x(2x+1)-3(1+2x)=(2x+1)(2x-3)$
㉢ $(x+2)(x-1)-2(x+2)=(x+2)(x-3)$
㉣ $x^2-4x+4=(x-2)^2$
㉤ $2x^2+7x+6=(2x+3)(x+2)$

7. 다음은 인수분해 과정을 나타낸 것이다. $\boxed{}$ 안에 들어갈 말을 차례대로 나열한 것은?

㉠ $2x^3 - 8x^2 - 10x = 2x(x^2 - 4x - 5)$

$= 2x(x-5)(\boxed{})$

㉡ $(x+y)^2 + 3(x+y) + 2$ 에서 $\boxed{}$를 A 로 치환한다.

① $x-1,\ x-y$ ② $x-1,\ x+y$ ③ $x+1,\ x-y$

④ $x+1,\ x+y$ ⑤ $x,\ x+y$

해설

㉠ $2x^3 - 8x^2 - 10x = 2x(x^2 - 4x - 5)$

$= 2x(x-5)(x+1)$

8. 다음 자연수 중 $3^{16}-1$ 을 나누어 떨어지게 하는 수가 아닌 것은?

① 2　　② 4　　③ 5　　④ 9　　⑤ 10

해설

$3^{16}-1=(3^8-1)(3^8+1)$
$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=2\times4\times10\times82\times6562$

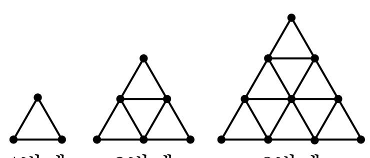
9. 자연수 1에서 $n-1$까지의 합은 $\dfrac{(n-1)n}{2}$이다. 자연수 6부터 $n-1$까지의 합이 21일 때, n의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$(6+7+8+\cdots+n-1)$
$=(1+2+\cdots+n-1)-(1+2+3+4+5)$
$\dfrac{(n-1)n}{2}-15=21$이므로
$n(n-1)=72$
$n^2-n-72=(n+8)(n-9)=0$
$n>0$이므로 $n=9$이다.

10. 그림과 같이 꼭짓점을 점으로 표현한 삼각형을 규칙적으로 이어 붙여서 n 번째 순서의 삼각형을 만드는데 사용한 점의 개수는 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 개일 때, 점의 개수가 21 개인 삼각형의 순서는?



① 5번 째　　② 6번 째　　③ 7번 째

④ 8번 째　　⑤ 9번 째

해설

$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = 21$ 이므로

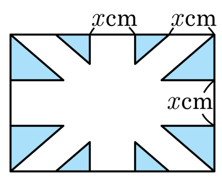
$n^2 + 3n - 40 = 0$

$(n-5)(n+8) = 0$

$n > 0$ 이므로 $n = 5$

따라서 점의 개수가 21 개인 삼각형의 순서는 5 번째이다.

11. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 12 cm^2 가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



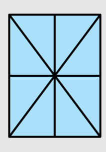
① 2 cm ② 3 cm
③ 4 cm ④ 2 cm 또는 7 cm
⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9-3x$, 세로가 $6-x$ 인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9-3x)(6-x)=12$

정리하면 $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

$x<3$ 이므로 $x=2$



12. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (2, 3) 일 때, 이 그래프가 제 2 사분면을 지나지 않을 a 의 값의 범위는? (단, $a \neq 0$ 임)

① $a < -\frac{4}{3}$ ② $a \leq -\frac{4}{3}$ ③ $a < \frac{3}{4}$
④ $a \leq -\frac{3}{4}$ ⑤ $a > \frac{4}{3}$

해설

a 의 부호에 따라 그래프의 모양이 다르므로 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 생각해야 한다면
$a > 0$ 이면 항상 제 2 사분면을 지난다.
$a < 0$ 이면 y 절편이 양수일 때에는 제 2 사분면을 지나고 y 절편이 음수이거나 0 일 때 제 2 사분면을 지나지 않는다.
꼭짓점이 (2, 3) 이므로 $y = a(x-2)^2 + 3$ 이다.
즉, $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 이다.
여기서 y 절편은 $4a + 3$ 이다.
$4a + 3 \leq 0$
$\therefore a \leq -\frac{3}{4}$

13. $\sqrt{59+a}=b$라 할 때, b가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a와 그 때의 b의 합 $a+b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

59 보다 큰 제곱수는 $64, 81, 100, \cdots$ 이므로
$59+a=64, 81, 100\cdots$
$\therefore a=5, 22, 41, \cdots$
따라서 가장 작은 자연수 $a=5$, $b=\sqrt{59+5}=8$이다.
$\therefore a+b=5+8=13$

14. 한 변의 길이가 9 인 정사각형의 내부에 10 개의 점을 놓을 때, 두 점 사이의 거리가 r 이하인 두 점이 반드시 존재한다. 이때 r 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$

해설

한 변의 길이가 9 인 정사각형의 내부를 한 변의 길이가 3 인 작은 정사각형 9 개로 나누고
작은 정사각형 한 개안에 하나의 점을 놓는다고 할 때,
모두 10 개의 점을 놓아야 하므로 반드시 2 개의 점은 한 개의 작은 정사각형 안에 들어간다.
한 변의 길이가 3 인 작은 정사각형 안에 2 개의 점을 놓을 때
두 점 사이의 거리의 최댓값은 작은 정사각형의 대각선의 길이 이므로 $3\sqrt{2}$ 이므로
$r = 3\sqrt{2}$

15. $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. 예를 들면 $[3] = 3$, $[3.4] = 3$ 이다.

$a = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{[a]+1}{a} + \dfrac{2a}{[a]-a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 - 7\sqrt{3}$

해설

$[2 + \sqrt{3}] = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{3+1}{2+\sqrt{3}} + \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{3-\left(2+\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} + \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-3} \\ &= 8 - 4\sqrt{3} - \left(2 + 3\sqrt{3} + 3\right) \\ &= 3 - 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

16. x 에 대한 이차방정식 $(a+2)x^2-a^2x+4=0$ 의 한 근이 1 일 때, a 의 값과 나머지 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=3$

▷ 정답 : $x=\frac{4}{5}$

해설

$(a+2)x^2-a^2x+4=0$에
$x=1$ 을 대입하면
$a+2-a^2+4=0$
$a^2-a-6=0$
$(a+2)(a-3)=0$
이차방정식 $(a+2)x^2-a^2x+4=0$은
x^2 의 계수는 0 이 아니어야 하므로
$\therefore\ a=3$
$a=3$을 이차방정식에 대입하면
$5x^2-9x+4=0$
$(x-1)(5x-4)=0$
$x=1$ 또는 $x=\frac{4}{5}$
따라서 $a=3$이고 나머지 한 근은 $\frac{4}{5}$이다.

17. $x^2-x-1=0$의 한 근이 m일 때, $\dfrac{m^{2n-1}}{(m^{n-1}+m^{n-2})(m^{n-2}+m^{n-3})}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2-x-1=0$의 한 근이 m이므로 $m^2-m-1=0$

$m^2=m+1$

$m^3=m^2+m$

$m^4=m^3+m^2$

$\vdots$

$m^n=m^{n-1}+m^{n-2}$

$$\therefore \frac{m^{2n-1}}{(m^{n-1}+m^{n-2})(m^{n-2}+m^{n-3})}$$

$$=\frac{m^{2n-1}}{m^n\, m^{n-1}}$$

$$=\frac{m^{2n-1}}{m^{2n-1}}$$

$$=1$$

18. $\frac{7}{3+\sqrt{2}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, b 는 이차방정식 $ax^2 - kx - m = 0$ 의 한 근이다. 이때, 유리수 k, m 의 차 $k - m$ 의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$\frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{7} = 3 - \sqrt{2} = 1.\times\times\times$

$\therefore a = 1,\ b = 2 - \sqrt{2}$

$2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}$ 가 $ax^2 - kx - m = 0$ 의 근이므로

$\frac{k}{a} = 4,\ -\frac{m}{a} = 2$

$\therefore k = 4,\ m = -2$

$\therefore k - m = 4 - (-2) = 6$

19. 이차방정식 $x^2+3x-11=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2+3x-11=0$　　② $x^2+3x-13=0$

③ $x^2+x-13=0$　　④ $x^2+x-11=0$

⑤ $x^2+x-9=0$

해설

$x^2+3x-11=0$ 에서 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-11$

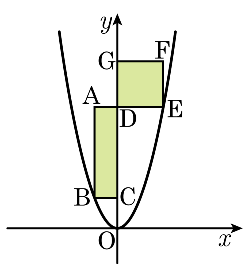
$\alpha+1$, $\beta+1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식에서

두 근의 합은 $(\alpha+1)+(\beta+1)=-1$

두 근의 곱은 $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-13$

$\therefore\ x^2+x-13=0$

20. 다음 그림에서 포물선은 $y=2x^2$ 이고, 직사각형 ABCD 의 넓이와 정사각형 DEFG 의 넓이는 같다. $\overline{\mathrm{DE}} = 2\overline{\mathrm{AD}}$ 일 때, 점 E 의 x 좌표값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{3}$

해설

점 E 의 x 좌표값을 p 라 하면 $\overline{\mathrm{DE}} = 2\overline{\mathrm{AD}} = p$ 이다.

□ABCD = □DEFG 에서 $\overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{DE}}^2$,

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}} \times \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{DE}}^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CD}} = 2p \quad \cdots$ ㉠

또, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AD}} = \frac{p}{2}$ 이므로 점 B $\left(-\frac{p}{2}, \frac{p^2}{2}\right)$, $\overline{\mathrm{OC}} = \frac{p^2}{2}$,

$\overline{\mathrm{DE}} = p$ 에서 점 E$(p,\ 2p^2)$, $\overline{\mathrm{OD}} = 2p^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{OD}} - \overline{\mathrm{OC}} = 2p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{3}{2}p^2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3}{2}p^2 = 2p$, $p(3p-4) = 0$

$\therefore\ p = \frac{4}{3} (\because\ p > 0)$

따라서 점 E 의 x 좌표값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

21. 이차함수 $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2$의 그래프와 직선 $y=-6$과의 두 교점 A, B와 x축 위의 두 점 C$(-2,\ 0)$, D$(p,\ 0)$을 연결한 사각형이 평행사변형일 때, 상수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차함수 $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2$의 그래프와 직선 $y=-6$과의 두 교점 A, B는

$-6=-\frac{2}{3}(x-2)^2$에서 $x=5,\ -1$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=6$

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=6$이다.

점 C의 좌표가 $(-2,\ 0)$이므로 점 D의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

$\therefore\ p=4$

22. 이차함수 $y = 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18$ 의 그래프의 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있을 때, k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 < k < 0$

해설

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18 \\ &= 3(x+k)^2 - 3k^2 + 4k^2 - 3k - 18 \\ &= 3(x+k)^2 + k^2 - 3k - 18 \end{aligned}$$

꼭짓점은 $(-k,\ k^2 - 3k - 18)$

이때, 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있으므로

$-k > 0 \qquad \therefore\ k < 0$

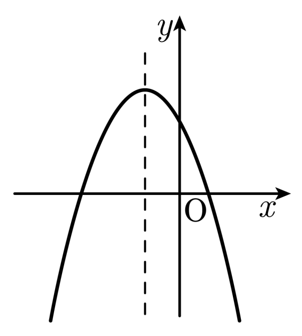
$k^2 - 3k - 18 < 0$

$(k+3)(k-6) < 0$

$\therefore\ -3 < k < 6$

따라서 $-3 < k < 0$ 이다.

23. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y=cx^2+ax+b$ 의 그래프의 꼭짓점은 제 몇 사분면에 있는가?



① 제1 사분면 ② 제2 사분면 ③ 제3 사분면
④ 제4 사분면 ⑤ 답이 없다.

해설

$a<0,\ c>0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$ 에서 $b<0$ $\therefore$ $a<0,\ b<0,\ c>0$

$y=cx^2+ax+b$ 에서

(1)$c>0$ 이므로 아래로 볼록

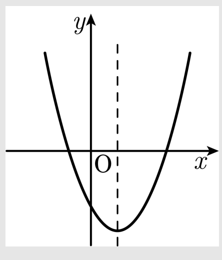
(2) 꼭짓점의 x 좌표를 구하면

$$y=c\left(x^2+\frac{a}{c}x+\frac{a^2}{4c^2}-\frac{a^2}{4c^2}\right)+b$$
$$=c\left(x+\frac{a}{2c}\right)^2-\frac{a^2}{4c}+b\text{이므로}$$

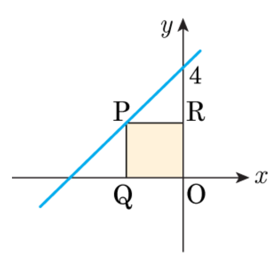
축 : $-\dfrac{a}{2c}>0$

(3)y 절편 : $b<0$

따라서, 그래프는 다음 그림과 같으므로 꼭짓점은 제4사분면에 있다.



24. 다음 그림과 같이 직선이 $y = x + 4$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발이 각각 Q, R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 S 라 한다. S 가 최대가 될 때 점 P 의 좌표는?



① $(2, 1)$　　② $(2, 4)$　　③ $(-2, 2)$

④ $(-2, -4)$　　⑤ $(4, 2)$

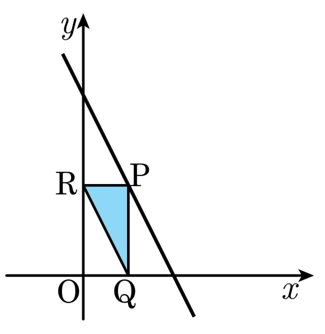
해설

점 P 의 좌표는 $(a, a+4)$ 이고 넓이는 S 이므로

$S = a(a+4) = (a^2 + 4a + 4) - 4 = (a+2)^2 - 4$

$\therefore$ P$(-2, -2+4) =$ P$(-2, 2)$

25. 다음 그림과 같이 직선 $y = -2x + 6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, $\triangle$PRQ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



① $\frac{9}{4}$　② $\frac{7}{4}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{9}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$

해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면

$\mathrm{P}(a,\ -2a+6),\ \mathrm{Q}(a,\ 0),\ \mathrm{R}(0, -2a+6)$

$\triangle$PRQ 의 넓이를 y 라 하면

$$y = \frac{1}{2}a(-2a+6)$$
$$= -a^2 + 3a$$
$$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)$$
$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$a = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$