1. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

해설

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{(-8)}{1}=8$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}=\dfrac{17}{1}=17$

$\alpha\beta\gamma=\dfrac{d}{a}=-\dfrac{(-10)}{1}=10$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(8)^2-2\cdot(17)=30$

$-2\alpha\beta\gamma=-2\cdot 10=-20$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\gamma=10$

2. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 한 근이 $2 - i$ 일 때, 실수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 세 근 : $2 - i,\ 2 + i,\ \alpha$
세 근의 합 : $-a = 4 + \alpha \cdots$ ①
세 근의 곱 : $-5 = (2+i)(2-i)\alpha = 5\alpha$
$\therefore \alpha = -1$, ① 식에 대입하면 $a = -3$
$b = (2+i)(2-i) + (2+i) \cdot (-1) + (2-i) \cdot (-1) = 5 - 4 = 1$
$\therefore a^2 + b^2 = 10$

3. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y를 구하여 $x^2 - y^2$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 −12

해설

$\begin{cases} x - y = 2 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 20 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y = x - 2$를

㉡식에 대입하면

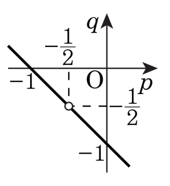
$x^2 + (x-2)^2 = 20$, $2x^2 - 4x + 4 - 20 = 0$,

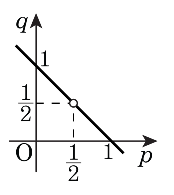
$x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x-4)(x+2) = 0$

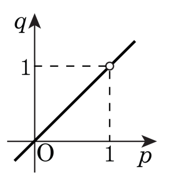
$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$

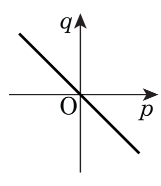
$\therefore\ x^2 - y^2 = 16 - 4 = 12$ 또는 $x^2 - y^2 = 4 - 16 = -12$

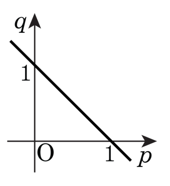
4. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 - px - q = 0$, $x^2 - qx - p = 0$이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p, q의 관계를 나타낸 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$$\begin{cases} x^2 - px - q = 0 & \cdots ① \\ x^2 - qx - p = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①–②에서 $(-p+q)x - (-p+q) = 0$

$\therefore\ (-p+q)(x-1) = 0$

여기서 $-p+q=0$이면 즉 $q=p$이면

①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.

$\therefore\ x = 1$이다.

이 때 ①에서 $1 - p - q = 0$

따라서 구하는 식은 $q = -p + 1$(단, $p \neq q$)

5. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 x와 y의 곱은?

① -2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$에서

$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$

$(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$

$x = 2y, x = 4$

$\therefore\ x = 4, y = 2 \quad \therefore\ xy = 8$

6. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

② $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\frac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④ $x=\frac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\frac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

7. 부등식 $|2x+2| < a+3$를 만족하는 실수 x값이 존재하기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a \le -4$　　② $a > -4$　　③ $a < -3$

④ $a > -3$　　⑤ $a \le -1$

해설

ⅰ) $x \ge -1$일 때,

$2x+2 < a+3,\ 2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

$x \ge -1,\ x < \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2} > -1,\ a > -3$

ⅱ) $x < -1$일 때,

$-2x-2 < a+3,\ -2x < a+5$

$x < -1,\ x > -\frac{1}{2}a-\frac{5}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$-\frac{1}{2}a-\frac{5}{2} < -1 \quad \therefore a > -3$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $a > -3$

8. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0$,
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ii) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0$,
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

9. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 0$이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$이 된다.

10. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서
$\alpha+\beta+\gamma=-3$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$
$\alpha\beta\gamma=1$
$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$$-c = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

$\therefore\ c=-1$
$\therefore\ a+b+c=-2$

11. 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $1-2w+3w^2-4w^3+3w^4-2w^5$의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ -4

해설

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω일 때

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로

$1-2\omega+3\omega^2-4\cdot 1+3\omega^3\cdot\omega-2\omega^3\cdot\omega^2$

$=1-2\omega+3\omega^2-4+3\omega-2\omega^2$

$=\omega^2+\omega+1-4=-4$

$\therefore\ -4$

12. 연립 방정식 $\begin{cases} 2x+y-z=8 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+2y+z=11 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z에 대하여 $3x-2y-z$의 값은 얼마인가?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{cases} 2x+y-z=8 & \cdots ① \\ x-y+3z=-4 & \cdots ② \\ 3x+2y+z=11 & \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② : $3x+2z=4 \cdots$ ④

(2 × ①) − ③ : $x-3z=5 \cdots$ ⑤

$11z=-11 \quad \therefore\ z=-1$

④식에 z 값 대입 : $x=2$

①식에 x, z 값 대입 : $y=3$

$3x-2y-z=3\cdot 2-2\cdot 3-(-1)=1$

13. 부등식 $(a+b)x+(2a-b)>0$의 해가 $x<-1$일 때, 부등식 $ax+b>0$의 해를 구하면?

① $x<-\frac{1}{2}$　② $x<-\frac{1}{3}$　③ $x>-\frac{1}{2}$
④ $x>-\frac{1}{3}$　⑤ $x>-1$

해설

$(a+b)x+(2a-b)>0$의 해가 $x<-1$이려면
$a+b<0$ ······ ㉠
$-\frac{2a-b}{a+b}=-1$ ······ ㉡
㉡에서 $a=2b$이고 $a+b=2b+b=3b<0$
$\therefore\ b<0$
$ax+b>0$에서 $2bx+b>0,\ 2bx>-b$
$b<0$이므로 $x<-\frac{1}{2}$

14. 방정식 $\sqrt{x^2+4x+4}-|x-4|<0$의 해를 구하면?

① $x<-1$　　② $x>-1$　　③ $x<0$

④ $x<1$　　⑤ $x>1$

해설

$|x+2|-|x-4|<0$

㉠ $x<-2$

$-(x+2)+(x-4)<0$

$0\cdot x-6<0$ 항상 성립

$\therefore\ x<-2$

㉡ $-2\le x<4$

$(x+2)+(x-4)<0,\ x<1$

$\therefore\ -2\le x<1$

㉢ $x\ge 4$

$x+2-x+4<0$　해가 없다.

㉠, ㉡, ㉢에 의해 $\therefore\ x<1$

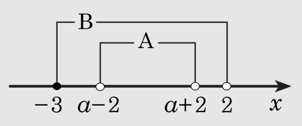
15. $|x-a|<2$가 $-3 \le x < 2$에 완전히 포함된다고 할 때, 정수 a의 가 될 수 있는 수들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$|x-a|<2 \Leftrightarrow -2<x-a<2 \Leftrightarrow a-2<x<a+2$

다음 그림에서



$-3 \le a-2,\ a+2 \le 2$

$\therefore -1 \le a \le 0$

따라서 위의 부등식을 만족하는 정수 a의 값은

$-1,\ 0$이고, 그 합은 -1이다.

16. $n \le x < n+1$ (단, n은 정수) 인 실수 x에 대하여 $< x >= n-2$, $\{x\} = n+2$로 정한다. $1 \le x < 2$, $3 \le y < 4$ 일 때, $< x+y > + \{x-y\}$가 나타낼 수 있는 정수들의 총합을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$1 \le x < 2, \quad 3 \le y < 4$에서
$4 \le x+y < 6, \quad -3 < x-y < -1$
그런데 $n \le x < n+1$이므로 조건에 맞게 범위를 나누어 값을 구해보면
$4 \le x+y < 5$에서 $< x+y >= 2$
$5 \le x+y < 6$에서 $< x+y >= 3$
$-3 < x-y < -2$ 에서 $\{x-y\}$은 정의되지 않는다.
$-2 \le x-y < -1$에서 $\{x-y\} = 0$
$\therefore < x+y > + \{x-y\} = 0+2+3$
$\therefore$ 정수들의 총합은 5