1. 두 점 $(8, 5)$, $(3, \ -7)$ 사이의 거리를 구하면?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

$\sqrt{(3-8)^2+(-7-5)^2}=\sqrt{169}=13$

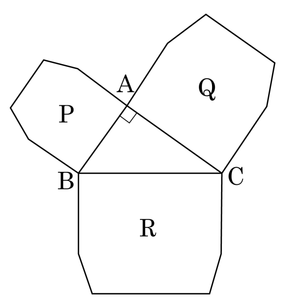
2. 두 점 A $(-1, 1)$, B $(1, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(3, 0)$ ② $(5, 0)$ ③ $(0, 3)$ ④ $(0, 5)$ ⑤ $(0, 7)$

해설

y 축 위의 점을 $(0, a)$라 하면
$\therefore 1^2 + (a-1)^2 = 1^2 + (a-5)^2$ 정리하면
$a = 3$

3. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $xy = z$

② $x + y = z$

③ $x^2 + y^2 = z^2$

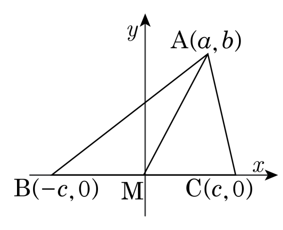
④ $x^3 + y^3 = z^3$

⑤ 위에는 정답이 없다.

해설

도형 P, Q, R 가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 이므로 도형 P, Q, R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ 이 된다. 그런데 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
따라서, 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라 하면 $x + y = z$

4. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> $A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 라 하면
> $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=$(나)
> $\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=$(다)$(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

$A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$ 이므로
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

5. 두 점 A(−2, 1), B(4, 7) 의 중점의 좌표는?

① $M\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ② $M(1, 2)$ ③ $M(1, 4)$
④ $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ⑤ $M(2, 2)$

해설

중점 M의 좌표 $M(x,\ y)$ 라 하면
$x = \frac{-2+4}{2} = 1\ \ , y = \frac{1+7}{2} = 4$
따라서 M(1, 4)

6. 세 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$, $\mathrm{C}(3, 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$일 때, ab의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ 3　⑤ 4

해설

무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$이므로

$\dfrac{a+1+3}{3} = 2$, $\dfrac{4+b+1}{3} = 1$

$a + 4 = 6 \quad \therefore a = 2$

$b + 5 = 3 \quad \therefore b = -2$

$\therefore ab = 2 \times (-2) = -4$

7. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$ 는 5 이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$ 의 좌표는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$a > b$ 일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$ 이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$ 의 좌표는 5

8. 세 점 A(2, 1), B(4, 3), C(a, 0)에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(a-2)^2 + 1^2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(a-4)^2 + 3^2}$

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$

$(a-2)^2 + 1 = (a-4)^2 + 9$

$4a = 20$

$\therefore\ a = 5$

9. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 4)$, $\mathrm{B}(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore\ \mathrm{P}=(2, 0)$
$a+b=2$

10. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

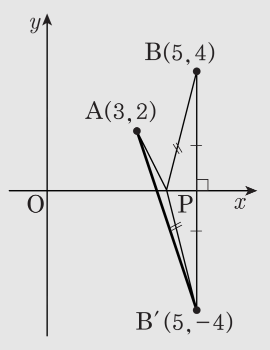
$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

11. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6　　② $\sqrt{37}$　　③ $\sqrt{38}$　　④ $\sqrt{39}$　　⑤ $\sqrt{40}$

해설

다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면
$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로
$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$
따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고
$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



12. 두 점 $A(1,3)$ $B(4,0)$ 을 잇는 선분 AB 를 $2:1$ 로내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q라 할 때 선분 PQ의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

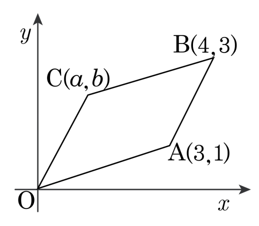
해설

내분점, 외분점을 구하는 공식을 이용한다.

$P = \left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right) = (3,1)$ $Q = \left(\frac{2\times4-1\times1}{2-1}, \frac{2\times0-1\times3}{2-1}\right) = (7, -3)$

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$

13. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2}$에서 $b = 2$

$\therefore a + b = 3$

14. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A(1, 1), B(2, 4), C(6, 3)이고 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 (x, y)일 때, $x-y$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

두 점 A(1, 1), B(2, 4)이므로
점 D의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a=\frac{2\cdot 2-1\cdot 1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot 4-1\cdot 1}{2-1}=7$$

따라서 D(3, 7)이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 (x, y)는

$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

15. 세 점 A $(1, 5)$, B $(-4, -7)$, C $(5, 2)$ 가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$
② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$
⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$
따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 13 : 5 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

16. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로

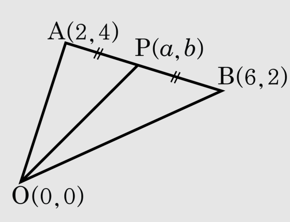
$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{OAP}$ 이려면

P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $\mathrm{P}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $\mathrm{P}(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



17. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$로 놓으면
$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$
$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$
$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$
$10a + 10 = -14a + 13$
$\therefore\ 24a = 3$
$\therefore\ a = \frac{1}{8},\ 2a = \frac{1}{4}$
$\therefore\ \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

18. $\triangle$ABC에서 A$(6,\ 1)$, B$(-1,\ 2)$, C$(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P$(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{\text{PA}}^2 = \overline{\text{PB}}^2 \iff (a-6)^2+(b-1)^2 = (a+1)^2+(b-2)^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\text{PA}}^2 = \overline{\text{PC}}^2 \iff (a-6)^2+(b-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

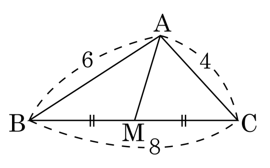
연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{\text{PA}}^2 = (2-6)^2+(-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{\text{PA}} = 5$

19. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$
$\therefore \overline{AM}^2=10$

20. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

21. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G(2, −1) 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

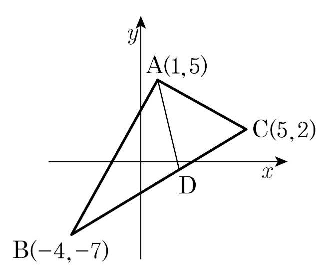
▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\frac{a+3}{3}=2$ 에서 $a=3$
또 $\frac{1+b}{3}=-1$ 에서 $b=-4$
$\therefore\ a+b=-1$

22. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(−4, −7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$
③ $(2,\ -1)$　④ $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$
⑤ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

해설

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2+(5+7)^2} = 13$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} = 5$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$

$\therefore\ D\left(\frac{-20+65}{13+5},\ \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

23. 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고, $A(2,\ 1)$, $B(0,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① $P(1,\ 0)$　② $P(0,\ 1)$　③ $P(-1,\ 0)$
④ $P(0,\ -1)$　⑤ $P(0,\ 0)$

해설

점 $P(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
$\sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + 4(a+1)^2}$
$-4a + 4 = 8a + 4$
$\therefore\ a = 0$
$\therefore\ P(0,\ 1)$

24. 세 꼭짓점이 A(1, 3), B(p, 3), C(1, q) 인 $\triangle$ABC 의 외심의 좌표가 (2, 1) 일 때 pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2$ 에서 $(p-2)^2 = 1$

$\therefore\ p = 1,\ 3$

그런데 $p = 1$ 일 때 점 A, B 가 일치하므로 $p \neq 1$ $\therefore\ p = 3$

$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2$ 에서 $(q-1)^2 = 4$

$\therefore\ q = 3,\ -1$

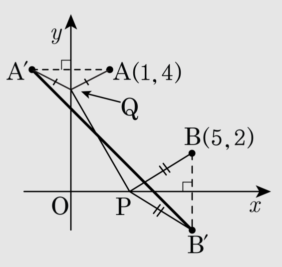
그런데 $q = 3$ 일 때 점 A, C 가 일치하므로 $q \neq 3$

$\therefore\ pq = 3 \times (-1) = -3$

25. 두 점 $A(1, 4), B(5, 2)$ 에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$　② $3\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $5\sqrt{2}$　⑤ $6\sqrt{2}$

해설



다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라고 하면

$A'(-1, 4), B'(5, -2)$

$$\therefore \overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP} = \overline{A'Q}+\overline{PQ}+\overline{B'P}$$
$$\geq \overline{A'B'}$$
$$= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2}$$
$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

26. 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라하자. 두 점 A, C의 좌표는 각각 $A(-2, 6)$, $C(4, 0)$이고, 삼각형 MBC의 무게중심은 원점이다. 점 D의 좌표를 (a, b)라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 M은 선분 AC의 중점이므로

M의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right)=(1, 3)$.

삼각형 MBC의 무게중심은 원점이므로

점 B의 좌표를 (c, d)라고 하면

$\frac{1+c+4}{3}=0$에서 $c=-5$

$\frac{3+d+0}{3}=0$에서 $d=-3$

따라서 점 B의 좌표는 $(-5, -3)$이다. 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$\frac{-5+a}{2}=1$에서 $a=7$

$\frac{-3+b}{2}=3$ 에서 $b=9$

$\therefore a+b=16$

27. $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(1, 4) 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b),$(3, 4)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.
따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로
$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore$ $a+b=3$