1. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x$ 의 그래프는 점 $(a,\ 2)$ 를 지난다. 이때, a 의 값이 될 수 있는 것을 모두 고르면?

① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$x = a,\ y = 2$ 를 대입하면
$2 = 2a^2 - 3a$, $2a^2 - 3a - 2 = 0$, $(2a + 1)(a - 2) = 0$, $\therefore\ a = -\frac{1}{2}$ 또는 $a = 2$

2. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프에 대한 설명 중에서 옳지 않은 것은?

① 원점 $(0, 0)$ 을 지난다.

② 직선 $x = 0$ 을 축으로 하고, 위로 볼록한 포물선이다.

③ 점 $(-2, 8)$ 을 지난다.

④ $y = -2x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

⑤ y의 값의 범위는 $y \geq 0$ 이다.

해설

② $x = 0$ 을 축으로 하고, 아래로 볼록한 포물선이다.

3. $y=-\frac{1}{4}x^2+q$ 의 그래프가 점 $(2,\ 5)$ 을 지날 때, 이 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $(0,\ 1)$ ② $(0,\ 3)$ ③ $(0,\ 6)$

④ $(2,\ 5)$ ⑤ $(4,\ 6)$

해설

$y=-\frac{1}{4}x^2+q$에 $(2,\ 5)$를 대입하면

$5=-\frac{1}{4}\cdot 4+q$

$\therefore q=6$

$y=-\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 6 만큼 이동한 그래프이므로 꼭짓점의 좌표는 $(0,6)$이다.

4. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 함수의 식은?

① $y = -2x^2 + 12x - 18$　② $y = 12x^2 - 6x + 9$

③ $y = 2x^2 + 12x - 18$　④ $y = x^2 - 3x + 1$

⑤ $y = -2x^2 - x - 18$

해설

$y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향
으로 3 만큼 평행이동시키면
$y = -2(x - 3)^2$
이 식을 전개하면,
$\therefore y = -2x^2 + 12x - 18$

5. $y = -2x^2$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동 했더니 $(2,\ a)$ 를 지난다고 한다. a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = -2x^2 \ \Rightarrow \ y = -2(x-3)^2 + 1$

$a = -2(2-3)^2 + 1 = -1$

6. 이차함수 $y = -5x^2 + 20x + 3 + 2k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k < -\frac{23}{2}$ 또는 $k < -11.5$

해설

$y = -5x^2 + 20x + 3 + 2k$

$= -5(x-2)^2 + 23 + 2k$

x 축과 만나지 않으려면 $23 + 2k < 0$, $2k < -23$, $k < -\frac{23}{2}$ 이다.

7. 직선 $x=1$ 을 축으로 하고 두 점 $(0,\ -1),\ (3,\ 5)$를 지나는 포물선이 나타내는 이차함수를 구하면?

① $y=2x^2-4x-1$ ② $y=-2x^2+4x+3$

③ $y=2x^2+4x-5$ ④ $y=\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x-1$

⑤ $y=\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+3$

해설

$y=a(x-1)^2+p$ 에 $(0,\ -1)$ 과 $(3,\ 5)$ 를 대입하여 a 와 p 를 구하면, $-1=a+p, 5=4a+p$, $a=2$, $p=-3$ 이 된다.
따라서 $y=2x^2-4x-1$ 이다.

8. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -19

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x - 3)^2 - 19$
$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

9. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프에서 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 함수의 식은 $y = -3(x-2)^2$ 이다.

② 축의 방정식은 $x = 2$ 이다.

③ 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$ 이다.

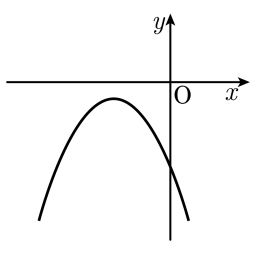
④ 위로 볼록한 그래프이다.

⑤ $x > 2$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가한다.

해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y = a(x-p)^2$ 이므로 $y = -3(x-2)^2$ 이다. 꼭짓점의 x 좌표는 2 이고 y 좌표는 0 이므로 $(2,\ 0)$ 이고, x 축으로 평행이동하면 축의 방정식이 $x = p$ 로 변하므로 $x = 2$ 이다. 위로 볼록한 그래프이고 축의 방정식이 $x = 2$ 이므로 $x > 2$ 인 범위에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다.

10. 이차함수 $y = -a(x-p)^2 - q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a,\ p,\ q$ 의 부호로 알맞은 것은?



① $a > 0,\ p > 0,\ q < 0$
② $a > 0,\ p > 0,\ q > 0$
③ $a > 0,\ p < 0, q > 0$
④ $a < 0,\ p = 0, q < 0$
⑤ $a < 0,\ p > 0, q = 0$

해설

$y = -a(x-p)^2 - q$ 의 그래프는 위로 볼록하므로 $-a < 0,\ a > 0$ 이고 꼭짓점의 좌표가 제 3 사분면 위에 있으므로 $p < 0$ 이고 $-q < 0,\ q > 0$ 이다.

11. 다음 중 주어진 조건을 모두 만족하는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은?

보기

㉠ 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같다.

㉡ 꼭짓점은 제 4 사분면 위에 있다.

㉢ 아래로 볼록하다.

㉣ y 절편이 양수이다.

① $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$ ② $y=\frac{1}{2}(x+3)^2+1$

③ $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ ④ $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

⑤ $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2-3$

해설

㉠ 에서 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같은 것은 이차항의 계수가 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 이다.

㉡ 꼭짓점의 x 좌표가 양수, y 좌표가 음수이다.

㉢ 아래로 볼록하므로 이차항의 계수가 양수이다.

㉣ y 절편이 양수이다.

이 조건을 만족하는 이차함수식은 ①이다.

12. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 3$ 과 $y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표가 일치할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$y = 2x^2 - 4 + 3$
$= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3$
$= 2(x - 1)^2 - 2 + 3$
$= 2(x - 1)^2 + 1$

꼭짓점의 좌표 : $(1,\ 1)$
꼭짓점의 좌표가 일치하므로
$y = x^2 + ax + b = (x - 1)^2 + 1$
$= x^2 - 2x + 2$

$\therefore a = -2,\ b = 2, a + b = 0$

13. 이차함수 $y = 2x^2 + 4x - k$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위는?

① $k > -2$　② $k > -1$　③ $k < -2$
④ $k < -1$　⑤ $k > 0$

해설

아래로 볼록한 포물선이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 꼭짓점의 y 좌표가 음수이어야 한다.
$y = 2x^2 + 4x - k = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - k = 2(x+1)^2 + (-2-k)$
꼭짓점 $(-1, -2-k)$ 에서 $-2-k < 0 \quad \therefore k > -2$

해설

$y = 2x^2 + 4x - k$ 가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나면 방정식 $0 = 2x^2 + 4x - k$ 이 서로 다른 두 근을 갖는다.
$D = 4^2 + 8k > 0 \quad \therefore k > -2$

14. 다음 함수의 그래프 중에서 제2 사분면을 지나지 <u>않는</u> 것은?

① $y = -3x^2 + 1$ ② $y = -(x-1)^2$

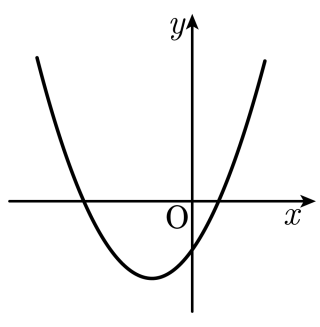
③ $y = -2(x+2)^2 + 1$ ④ $y = 2(x-1)^2 + 2$

⑤ $y = -3(x+3)^2 + 4$

해설

② $y = -(x-1)^2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, 위로 볼록이므로 제2사분면을 지나지 않는다.

15. 이차함수 $y = ax^2 - bx - 2$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1 사분면 ② 제2 사분면 ③ 제3 사분면
④ 제4 사분면 ⑤ 없다.

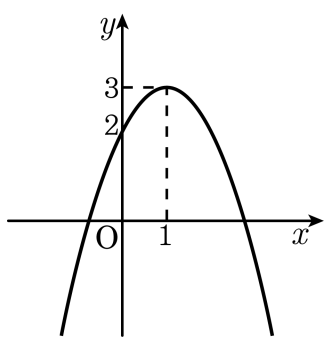
해설

아래로 볼록이므로 $a > 0$

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{b}{2a} < 0$ 이므로 $b < 0$

$y = ax + b$ 에서 기울기 $a > 0$, y 절편 $b < 0$ 이므로 제2 사분면을 지나지 않는다.

16. 다음 그림은 이차함수의 그래프를 그린 것이다. 이 이차함수의 식을 구하면?



① $y = -2x^2 + 4x + 2$ ② $y = -x^2 + 2x + 2$

③ $y = -2x^2 - 4x + 2$ ④ $y = -x^2 - 2x + 2$

⑤ $y = -3x^2 - 6x + 2$

해설

$y = a(x-1)^2 + 3$ 이 점 $(0,\ 2)$ 를 지나므로
$2 = a(0-1)^2 + 3,\ a = -1$ 이다.

$\therefore\ y = -(x-1)^2 + 3$
$= -x^2 + 2x + 2$

17. 가로의 길이가 5cm , 세로의 길이가 9cm 인 직사각형의 가로의 길이를 $x$cm 만큼 늘이고, 세로의 길이를 $x$cm 만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 2.5 ④ 3 ⑤ 3.5

해설

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (5+x)(9-x) \\ &= -x^2+4x+45 \\ &= -(x-2)^2+49 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값 49cm^2 를 가진다.

18. 세 점 $(0, -4)$, $(1, -1)$, $(2, 8)$을 지나는 이차함수의 식이 $y = ax^2 + bx + c$ 일 때, 이차함수 $y = bx^2 + cx + a$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

㉠ 아래로 볼록한 형태의 그래프이다.
㉡ y 절편은 3 이다.
㉢ x 절편은 두 개이다.
㉣ 왼쪽 위를 향하는 포물선 그래프이다.
㉤ 왼쪽 위를 향한다.

① ㉠,㉡ ② ㉡,㉢ ③ ㉡,㉤ ④ ㉢,㉣ ⑤ ㉣,㉤

해설

세 점 $(0, -4)$, $(1, -1)$, $(2, 8)$을 지나므로
$-4 = c$
$-1 = a + b + c$
$8 = 4a + 2b + c$
세 식을 연립하면, $a = 3$, $b = 0$, $c = -4$ 이다.
따라서 $y = bx^2 + cx + a$ 는
$y = -4x + 3$ 이고, 이 함수의 그래프는 y 절편이 3 이고 왼쪽 위를 향하는 직선이다.

19. 이차함수 $y = ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 일 때, abc 의 값은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 이므로

$y = ax^2 + bx + c$

$= a(x + 2)(x - 4)$

$= a(x^2 - 2x - 8)$

$= a(x - 1)^2 - 9a$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$\therefore a = -1$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 2x + 8$ 이고

$b = 2,\ c = 8$ 이다.

$\therefore abc = -1 \times 2 \times 8 = -16$

20. $y = x^2 + 2ax + a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{4}$

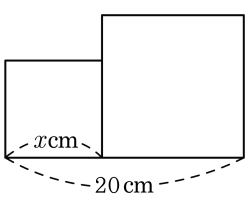
해설

$y = x^2 + 2ax + a = (x + a)^2 - a^2 + a$
최솟값은 $-a^2 + a$ 이다.

즉, $m = -a^2 + a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 이다.

$\therefore a = \frac{1}{2}$ 일 때, m 은 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

21. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



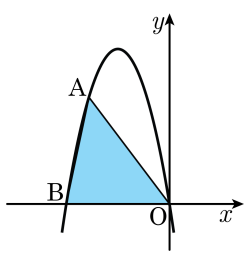
▶ 답 : cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,
넓이를 y 라고 하면
$y = x^2 + (20 - x)^2$
$= 2x^2 - 40x + 400$
$= 2(x - 10)^2 + 200$
따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

22. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



① 18 ② 27 ③ 36

④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점
$(0,\ 0),\ (-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0 = c,\ 0 = -36 - 6b$
$b = -6,\ c = 0$
$y = -x^2 - 6x = -(x+3)^2 + 9$
$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라
고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의
넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로

$\triangle OAB$ 의 넓이$= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$

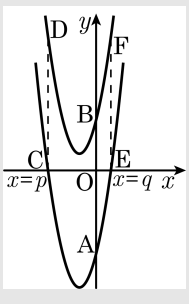
23. 두 이차함수 $y = 2x^2 + 4x + 3$, $y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $x = p$ 와 만나는 점을 각각 C, D, 직선 $x = q$ 와 만나는 점을 각각 E, F 라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = 2x^2 + 4x + 3$ 은 $y = 2(x+1)^2 + 1$
$y = 2x^2 + 4x - 5$ 는 $y = 2(x+1)^2 - 7$ 이므로
$y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프는 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 것이므로



$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$
$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = 2$

24. 이차함수 $y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 36 가 되는 모든 k 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4 = (x - 3k)^2 - 4$

$\therefore$ A$(3k,\ -4)$, B$(0,\ 9k^2 - 4)$

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 에서 $x = 3k - 2$ 또는 $3k + 2$

$\therefore$ C$(3k - 2,\ 0)$, D$(3k + 2,\ 0)$

$k > 0$ 이므로 y 절편, 두 개의 x 절편 모두 0 보다 크다.

$\therefore$ $\square$ABCD $= \triangle$CAD $+ \triangle$BCD

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (3k + 2 - 3k + 2) + \frac{1}{2} \times (9k^2 - 4)(3k + 2 - 3k + 2)$$

$$= 36$$

이 식을 정리하면 $8 + 2 \times (9k^2 - 4) = 36$

$k^2 = 2 \quad \therefore\ k = \pm\sqrt{2}$

따라서 k 값의 곱은 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ 이다.

25. 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ $(-3 \le x \le -1)$ 의 최솟값이 0 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{19}{5}$

해설

$f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$

$= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4}$

(1) $\frac{6+p}{2} < -3$, 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f(-3) = 7p + 39 = 0$

$\therefore\ p = -\frac{39}{7}$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값은 존재하지 않는다.

(2) $-3 \le \frac{6+p}{2} \le -1$, 즉, $-12 \le p \le -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$

$p^2 - 4p - 12 = 0$

$(p+2)(p-6) = 0$

$\therefore\ p = -2$ 또는 6

그런데 $-12 \le p \le -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값이 존재하지 않는다.

(3) $\frac{6+p}{2} \ge -1$, 즉, $p \ge -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$\therefore\ p = -\frac{19}{5}$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.