1. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A > B > 0,\ C > D > 0$이면 $AC > BD$이다.

② $A > B,\ C > D$이면 $A + C > B + D$이다.

③ $A > B > 0$이면 $A^2 > B^2$이다.

④ $A > B$이면 $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$이다.

⑤ $A > 0 > B$이면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$이다.

해설

④ 만약 $B < 0 < A$인 경우라면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$가 되어 주어진 문장은 틀리다.

2. $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le a$일 때, $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a의 최솟값은? (단, $a \ge 1$)

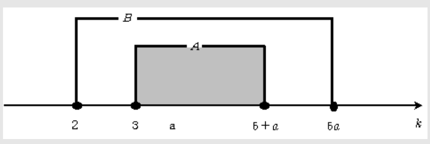
① 1 ② $\frac{8}{7}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \le x+y \le 5+a,\ 2 \le xy \le 5a$이므로

$3 \le x+y \le 5+a,$

이때 $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \le 5a$ 이어야 하므로 $4a \ge 5$

$\therefore a \ge \frac{5}{4}$

3. x에 대한 부등식 $ax+b \le bx+a$에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단 a, b는 실수)

① $a > b > 0$일 때, 해는 $x \ge 1$이다.

② $a < b < 0$일 때, 해는 없다.

③ $a = b$ 일 때, 해는 모든 실수이다.

④ $a = b$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a = b$ 일 때, 해는 $x > 1$ 이다.

해설

$ax+b \le bx+a$ 에서 $(a-b)x \le a-b$

(ⅰ) $a > b$일 때, $a-b > 0$이므로 $x \le \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \le 1$

(ⅱ) $a = b$ 일 때, $a-b = 0$이므로 $0 \cdot x \le 0$

$\therefore$ 해가 무수히 많다

(ⅲ) $a < b$일 때, $a-b < 0$이므로 $x \ge \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \ge 1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에서 해는 모든 실수

4. $ax+b>0$의 해가 $x<2$일 때, $(a+b)x<5b$의 해는?

① $x>5$ ② $x>10$ ③ $x<1$

④ $x<5$ ⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$에서 $ax>-b$

해가 $x<2$이므로

$a<0$ ⋯⋯㉠

$-\frac{b}{a}=2$ ⋯⋯㉡

㉡을 정리하면 $b=-2a$ ⋯⋯㉢

㉢에서 $b=-2a$를 $(a+b)x<5b$에 대입하면

$(a-2a)x<5\cdot(-2a)$, $-ax<-10a$

㉠에서 $a<0$이므로 $x<10$

5. 부등식 $|x-1|+|x-3|<6$의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2-4x-5<0$　② $x^2-4x+3<0$
③ $x^2-6x+5<0$　④ $x^2-4x+3\leqq 0$
⑤ $x^2-8x+15\leqq 0$

해설

(ⅰ) $x<1$일 때, $-x+1-x+3<6$
$x>-1$ $\therefore -1<x<1$
(ⅱ) $1\le x<3$일 때, $x-1-x+3<6$
$2<6$ $\therefore 1\le x<3$
(ⅲ) $x\ge 3$일 때, $x-1+x-3<6$
$x<5$ $\therefore 3\le x<5$
$\therefore -1<x<5$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)<0,\ x^2-4x-5<0$

6. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다　　② $x = 3$

③ $x \neq 3$인 모든실수　　④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, (실수)$^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

7. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$
② x는 모든 실수
③ $x \ne 3$인 모든 실수
④ $x = 3$
⑤ 해가 없다

해설
$x^2 - 6x + 9 \le 0$
$(x-3)^2 \le 0$
$\Rightarrow x = 3$

8. 부등식 $x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 범위를 구하면 $a < k < b$이다. 이 때, ab의 값은?

① -10　② -9　③ -8　④ -7　⑤ -6

해설

$x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하려면
판별식이 실근을 갖지 않을 때이므로
$D = k^2 - 4 \cdot 2 < 0$
$k^2 - 8 < 0, \left(k - 2\sqrt{2}\right)\left(k + 2\sqrt{2}\right) < 0$
$\therefore -2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$
따라서 $a = -2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$이므로
$ab = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8$

9. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$,　$\beta = 0$
$\therefore\ \alpha + \beta = -4$

10. 이차부등식 $ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a<0$ ③ $a<2$
④ $a<4$ ⑤ $a<8$

해설

$ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면
ⅰ) $a<0$
ⅱ) $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=2^2-a^2<0$
$a^2-4>0, (a+2)(a-2)>0$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위를 구하면 $a<-2$

11. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 1$ ② $a < -\frac{1}{3}$ ③ $a \geq -\frac{1}{3}$

④ $a \leq -\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3} < a < 1$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a < 0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2 + (a+1)x + a = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$D = (a+10)^2 - 4a^2 < 0, \ -3a^2 + 2a + 1 < 0$
$3a^2 - 2a - 1 > 0, \ (3a+1)(a-1) > 0$
$\therefore a < -\frac{1}{3}$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a < -\frac{1}{3}$
따라서 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면
$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

12. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 의 해가 $2 < x < 3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로
$(x-2)(x-3) < 0$
$x^2 - 5x + 6 < 0$, $a = -5, b = 6$
$\therefore\ a + b = 1$

13. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$ ㈎
㈎를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0$, $2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

14. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$ ② $-7<x<-5$
③ $-7<x<5$ ④ $5<x<7$
⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

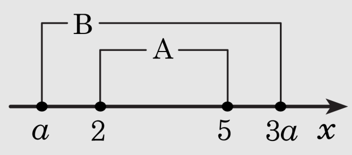
$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로
$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$
$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$
$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ ㈎
㈎를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면
$-4x^2-48x-140<0$
$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$
$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

15. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \geq 0$
$x^2 - 7x + 10 \leq 0$
$(x-2)(x-5) \leq 0$
$2 \leq x \leq 5$
$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$
$(x-a)(x-3a) \leq 0$
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

16. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2-6x+1\le 0$　　② $x^2-2x-3<0$

③ $x^2-x+1>0$　　④ $x^2-6x+9>0$

⑤ $4x^2-4x+1<0$

해설

① $(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2})\le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3)<0 \Rightarrow -1<x<3$

③ $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2>0 \Rightarrow x\ne 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2<0 \Rightarrow$ 해는 없다

17. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-x-6 \le 0 \\ 4x^2-8x+3 \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
② $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x \le 3$
③ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$
④ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
⑤ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

해설

$\begin{cases} x^2-x-6 \le 0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2-8x+3 \ge 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $(x-3)(x+2) \le 0$
$-2 \le x \le 3$
㉡ $(2x-3)(2x-1) \ge 0$
$x \ge \frac{3}{2}, \quad x \le \frac{1}{2}$
㉠과 ㉡의 공통범위 :
$-2 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \le x \le 3$

18. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ |x-1| \le 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $-3 \le x \le 2$ ② $-2 \le x \le 2$ ③ $-1 \le x \le 2$
④ $0 \le x \le 2$ ⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2+x-6 \le 0$ 에서
$(x+3)(x-2) \le 0$
$-3 \le x \le 2 \cdots$ (가)
$|x-1| \le 3$ 에서
$-3 \le x-1 \le 3$
$-2 \le x \le 4 \cdots$ (나)
(가), (나)에서 $-2 \le x \le 2$

19. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$