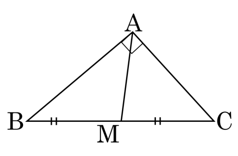
**1.** 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면




$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right) \\ &= \overline{BC}^2\end{aligned}$$

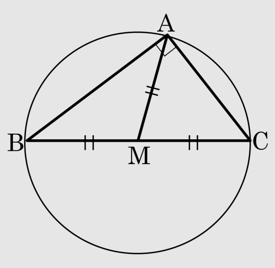
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $3\ ,\ 2\overline{AM}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}$
② $4\ ,\ 2\overline{AM}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}$
③ $2\ ,\ \overline{AM}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}$
④ $2\ ,\ \overline{AM}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{2}$
⑤ $\frac{16}{5}\ ,\ \overline{AM}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$$




이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right) \\ &= \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2\end{aligned}$$

**2.** BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

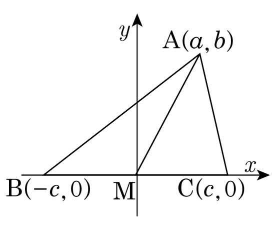
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$ 이므로

$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$

$\therefore \overline{BM}^2 = 13$

$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$

**3.** 다음은 $\triangle$ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 을 증명하는 과정이다.




> 직선 BC를 $x$축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 $y$축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C 의 좌표를 각각
> A$(a,b)$, B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 라 하면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나)
> $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

**해설**

A$(a,b)$, B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\,(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

**4.** $x$ 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3,-2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 $x$ 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

**5.** 방정식 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 $y$ 축에 접할 조건은?

① $b^2=c$　② $c^2=b$　③ $a^2=c$
④ $c^2=a$　⑤ $b=2c$

해설
$y$ 축과의 공유점을 구하는 식은
$x=0$ 으로부터 $y^2+2by+c=0$
$y$ 축에 접할 조건은 $D/4=b^2-c=0$

**6.** 방정식 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 $y$ 축에 접할 조건은?

① $b^2=c$　② $c^2=b$　③ $a^2=c$
④ $c^2=a$　⑤ $b=2c$

해설
$y$ 축과의 공유점을 구하는 식은 $x=0$ 으로부터
$y^2+2by+c=0$
$y$ 축에 접할 조건은 $D/4=b^2-c=0$

**7.** 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, $R$ 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, $R$ ② $3Q(x)$, $3R$ ③ $3Q(x)$, $R$
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, $R$ ⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$

**8.** $x$ 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 $B$ 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 $B$ 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$    ② $x^2 + x + 2$    ③ $x^2 - x + 2$
④ $x^2 - 2x + 2$    ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x + 1) - 6x + 2$ 에서

$B(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$

$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1)$

$\quad = x^2 + 2x + 2$

**9.** $x$ 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 $a$, $b$ 의 값을 정할 때, $ab$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$

$A = (x + p)$

$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$

$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$

우변을 정리하면

$\therefore \ a = -2, b = 3$

$\therefore ab = -6$

**10.** $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$ 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

**11.** $x^2 + y^2 = 4$를 만족시키는 실수 $x, y$에 대하여 $2y + x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$에서 $x^2 = 4 - y^2$

$x, y$가 실수이므로

$x^2 = 4 - y^2 \geq 0,\ y^2 \leq 4$

$\therefore -2 \leq y \leq 2$

$2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$을 대입하면

$2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$

$= -y^2 + 2y + 4 = -(y-1)^2 + 5$

이 때, $-2 \leq y \leq 2$이므로 $y = 1$일 때

최댓값은 5, $y = -2$일 때 최솟값은 $-4$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

**12.** $m$이 실수일 때, $x$에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 $\alpha, \beta$에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\geq 0$

$m^2-2m-3\leq 0, (m+1)(m-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq m\leq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$

이 때, $-1\leq m\leq 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

**13.** 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5},\ y = -\sqrt{5}$ ② $x = -2\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x+2y) = 0$

ⅰ) $x = y\ x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\ x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ⅱ) $x = -2y$

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5\ y = \pm\sqrt{5},\ x = \mp 2\sqrt{5}$

$\therefore$ 해: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

**14.** 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x$, $y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② $4$ ③ $-3\sqrt{2}$

④ $-4$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

**15.** 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 $x$, $y$에 대하여 $x$값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $-2\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y) = 0$
㉠ $x = 2y$일 때
$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$
$y^2 = 2$ , $y = \pm\sqrt{2}$
$x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$
$x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$
㉡ $x = -y$일 때
$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10$, $y^2 = 5$, $y = \pm\sqrt{5}$
$x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$
$x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

**16.** 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i + 4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2+2i$

② $-2i$

③ $-3$

④ $-5\sqrt{5}i$

**17.** 복소수 $x = a+bi$($a$, $b$는 실수)가 $x^2 = 3+4i$ , $x^3 = 2+11i$ 를 만족할 때 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ )

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3+4i)(a+bi) \\ &= (3a-4b)+(4a+3b)\,i \end{aligned}$$

$(3a-4b)+(4a+3b)\,i = 2+11i$

$3a-4b = 2, 4a+3b = 11$

$\therefore a = 2, b = 1$ 이므로 $a+b = 3$

해설

$x = \dfrac{x^3}{x^2} = a+bi$

$$\begin{aligned} \frac{2+11i}{3+4i} &= \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{50+25i}{25} \\ &= 2+i \end{aligned}$$

$\therefore a = 2, b = 1$

**18.** $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 $n$ 의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(n+i)^4 = \{(n+i)^2\}^2 = (n^2 - 1 + 2ni)^2$
이것이 정수가 되려면 $n^2 - 1 + 2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.
i) $n = 0$ 일 때 성립
ii) $n^2 - 1 = 0$ , $n = \pm 1$ 일 때 성립
따라서 구하는 정수의 개수는 3 개

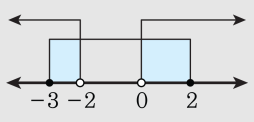
해설

$(n+i)^4 = n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$
이것이 실수이려면, $4n^3 - 4n = 0$ , $n = 0$ , $\pm 1$
이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 $n$ 의 개수는 3 개다.

**19.** 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ x^2+ax+b>0 \end{cases}$ 의 해가 $-3 \le x < -2$ 또는 $0 < x \le 2$일 때, $a, b$ 를 구하여 $a \times b$ 를 계산하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설




$x^2+x-6=(x+3)(x-2) \le 0$에서
$-3 \le x < 2$이므로
연립부등식의 해가 다음 그림과 같으려면 $x^2-ax+b>0$의 해는
$x<-2, x>0$이어야 한다.
$x^2+ax+b=x(x+2)=x^2+2x>0$
$\therefore a=2,\ b=0$
$\therefore a \cdot b=0$

**20.** 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 $a$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

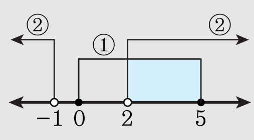
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 $a$의 값은 2이다.



**21.** 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x+4 \le 0 \\ x^2-(k+3)x+3k > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \le 4$ 가 되도록 하는 $k$ 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 1$　② $-1 < k < 3$　③ $k \ge -1$
④ $k \le 1$　⑤ $-1 \le k \le 3$

해설

$x^2-5x+4 \le 0$ 에서 $(x-1)(x-4) \le 0$, $1 \le x \le 4$
$x^2-(k+3)x+3k > 0$ 에서 $(x-k)(x-3) > 0$
ⅰ) $x < k$ 또는 $x > 3$
ⅱ) $x < 3$ 또는 $x > k$
해가 $3 < x < 4$ 가 되려면 ⅰ) 의 경우이어야 하고 $k \le 1$ 이어야 한다

**22.** 두 점 $\mathrm{A}(1,3)$, $\mathrm{B}(4,1)$ 과 $x$ 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $\mathrm{A}(1,3)$ 을 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'$ 이라 하면

$\mathrm{A}'(1,-3)$

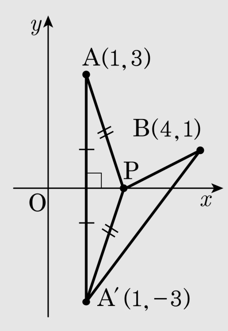
이 때, 다음 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$



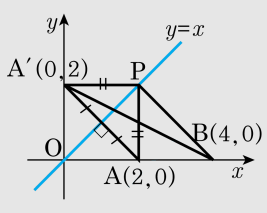
**23.** $x$ 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0), \mathrm{B}(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'$ 이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ 2)$

이때, 다음 그림에서




$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

**24.** 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ m)$ 과 $x$ 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 $m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A'}(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0\ )$