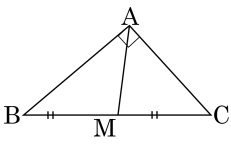


1. 다음은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{\text{㉠}} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{\text{㉡}}^2 \right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$$\boxed{\text{㉡}} = \boxed{\text{㉢}} \overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{\text{㉣}} \left(\boxed{\text{㉤}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2$$

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① $3, 2\overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

② $4, 2\overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
- ③ $2, \overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

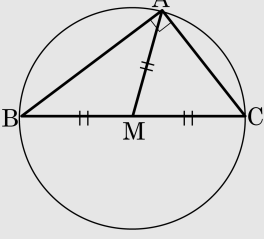
④ $2, \overline{AM}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
- ⑤ $\frac{16}{5}, \overline{AM}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2 \right)$$

이 때, $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \text{ 이므로 } \boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2 \left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4} \right) \\ &= \boxed{2} \left(\boxed{\frac{1}{2}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

2. BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$ 가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

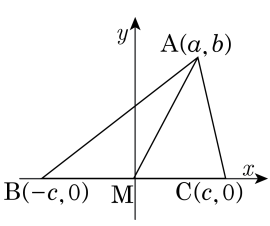
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$$

$$\therefore \overline{BM}^2 = 13$$

$$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$$

3. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a + c)^2 + b^2 + (a - c)^2 + b^2 =$ (가)이고,
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$
 따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 =$ (나)
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ (다) $(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

위

의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
 ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
 ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
 ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
 ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
 $= \{(-c - a)^2 + (0 - b)^2\} + \{(c - a)^2 + (0 - b)^2\}$
 $= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$ 이므로
 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

4. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ (x - a)(x + 2) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이 될 때, 실수 a 의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2 + 3x - 4 < 0$ 의 해가
 $-4 < x < 1$ 이므로
연립부등식의 해가 $-2 < x < 1$ 가 되려면
 $(x - a)(x + 2) > 0$ 의 해는
 $x < a, x > -2$ 이고, $a \leq -4$ 이다.

5. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow (x - 1)^2 \leq 0$$

$(x - 1)^2$ 은 항상 0 이상이므로

만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$$

$$\rightarrow (x + 1)^2 + 1 \geq 1$$

$\therefore$ 모든 실수

$$\therefore x = 1$$

6. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 1 < x + 1 < x^2 - 3x + 1 \\ x + 3 > -x + 2 \end{cases}$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때,

$2a + b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+3} < \frac{x+1}{-x+2} < \frac{x^2-3x+1}{\dots} \\ \text{(가)} & \text{(나)} & \text{(다)} \end{cases}$$

(가)에서 $x^2 - x - 2 < 0, (x - 2)(x + 1) < 0$

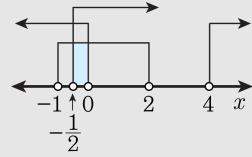
$\therefore -1 < x < 2$

(나)에서 $x^2 - 4x > 0, x(x - 4) > 0$

$\therefore x < 0$ 또는 $x > 4$

(다)에서 $2x > -1$

$\therefore x > -\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2} < x < 0$

따라서 $a = -\frac{1}{2}, b = 0$ 이므로 $2a + b = -1 + 0 = -1$

7. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?
- ① 중근 ② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근 ④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a-1)^2 - (a^2 - 3a + 16) = -15 < 0$$

$D = (a-1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$
 · 주어지 이차방정식의 서로 다른 두 해가 존재한다.

8. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$ 의 근을 판별하면?
(단, a, b, c 는 서로 다른 양의 실수이다.)

- ① 서로 다른 두 허근
- ② 서로 다른 두 실근
- ③ 서로 같은 두 실근
- ④ 서로 다른 두 허근
- ⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.
(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

9. 0이 아닌 두 실수 a, b 가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 를 만족할 때, 다음 [보기]의 x 에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$
- ㉡ $x^2 - ax - b = 0$
- ㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로 $a < 0, b < 0$
㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$ 에서
 $D = b^2 - 4a > 0$
㉡ $x^2 - ax - b = 0$ 에서
 $D = a^2 + 4b$ 는 음수, 양수를 판별할 수 없다.
㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$ 에서
 $\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

10. 두 함수 $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = -x^2 + 4x + a + b$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 , $g(x)$ 의 최댓값은 9 라고 할 때, 상수 a , b 의 값을 구하면?

- ① $\begin{cases} a = 3, b = -8 \\ a = 2, b = 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} a = -2, b = 6 \\ a = 2, b = -3 \end{cases}$
- ③ $\begin{cases} a = -3, b = 8 \\ a = 2, b = 3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} a = -1, b = 2 \\ a = 2, b = 3 \end{cases}$
- ⑤ $\begin{cases} a = -3, b = 8 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$

해설

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + b$ 에서 $x = a$ 일 때, 최솟값은 $-a^2 + b = -1$
 $\dots$ ①

$g(x) = -(x-2)^2 + 4 + a + b$ 에서 $x = 2$ 일 때, 최댓값은 $4 + a + b = 9 \dots$ ②

②에서 $b = -a + 5$

이것을 ①에 대입하면,

$$-a^2 - a + 5 = -1, \quad a^2 + a - 6 = 0$$

$$\therefore a = -3, \quad a = 2$$

즉 $a = -3$ 일 때, $b = 8$

$a = 2$ 일 때, $b = 3$

11. x 가 실수일 때, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ☐ Ⓐ $a < 0$
- ☐ Ⓑ $4a + b = 0$
- ☐ Ⓒ $4a - c = -3$

- ☐ ① Ⓐ
- ☐ ② Ⓑ
- ☐ ③ Ⓐ, Ⓑ
- ☐ ④ Ⓑ, Ⓒ
- ☒ ⑤ Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3을 갖는 이차함수는
 $y = a(x - 2)^2 + 3(a < 0)$ 이다.
 $ax^2 + bx + c = a(x - 2)^2 + 3$ 이므로
 $b = -4a, c = 4a + 3$ 이다.

12. 두 점 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ 을 지나는 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 는 $x = c$ 일 때, 최솟값 d 를 갖는다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

두 점 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ 을 지나므로
 $y = x^2 + ax + b$ 는 y 축 대칭이다.
축이 $x = 0$ 에서 $a = 0$, $c = 0$, $b = d$
 $(2, 0)$ 을 지나므로 $0 = 4 + b \quad \therefore b = -4 = d$
 $\therefore a + b + c + d = 0 - 4 + 0 - 4 = -8$

13. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,
 $\alpha + \beta$ 의 최솟값을 구하면?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x - y)(x + 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

1) $y = 2x$ 일 때

$$x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 20 \quad \therefore x = \pm 2, y = \pm 4$$

2) $x = -2y$ 일 때

$$4y^2 + y^2 = 5y^2 = 20$$

$$\therefore y = \pm 2, x = \mp 4 \text{ (복호동순)}$$

$$\therefore (x, y) = (2, 4), (-2, -4), (-4, 2), (4, -2)$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, -2, 2$$

그러므로 $\alpha + \beta$ 의 최솟값은 -6

14. x, y 가 자연수일 때, 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : (4, 4)

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 32 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } (2x - y)(x - y) = 0$$

$$\therefore y = x \text{ 또는 } y = 2x$$

$$y = x \text{를 } \textcircled{2}\text{에 대입하면 } 2x^2 = 32$$

$$\therefore x = \pm 4, y = \pm 4$$

$$y = 2x \text{를 } \textcircled{2}\text{에 대입하면 } 5x^2 = 32$$

$$\therefore x = \pm \frac{4\sqrt{10}}{5}, y = \pm \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

x, y 는 자연수이므로 구한 해는

$$\therefore x = 4, y = 4$$

15. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + 2y) = 0$$

i) $x = y$ $x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$$y = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ii) $x = -2y$

$$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$$

$$y^2 = 5 \quad y = \pm \sqrt{5}, x = \mp 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \text{해: } \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$$

16. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$ 의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$ 에서 $x = 1, x = -1$ 일 때 성립하므로

인수정리와 조립제법을 이용하면

(좌변) $= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + a) = 0$

따라서 모두 실근이 되려면

$x^2 + 2x + a = 0$ 의 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

17. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이면 $x = 1 + 2i, x^2 = -3 + 4i, x^3 = -11 - 2i, x^4 = -7 - 24i,$
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$
 $= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$
 $(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$
 $\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$
연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$ 에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면
 $a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$
 $\therefore k = 4, a = 2, b = 0$

18. 삼차방정식 $x^3 + (2a + 3)x^2 - (6a + 5)x + (4a + 1) = 0$ 이 중근을 가질 때, 상수 a 의 값을 구하면?
- ① $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$ ② $a = -2, -2 \pm \sqrt{10}$
 ③ $a = 3, -3 \pm \sqrt{5}$ ④ $a = 1, 4 \pm \sqrt{10}$
 ⑤ $a = -1, -2 \pm 2\sqrt{2}$

해설

$f(x) = x^3 + (2a + 3)x^2 - (6a + 5)x + 4a + 1$ 이라 하면
 $f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $(x - 1)$ 을 인수로 갖는다.

1	1	2a+3	-6a-5	4a+1
		1	2a+4	-4a-1
	1	2a+4	-4a-1	0

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
 $(x - 1) \{ x^2 + 2(a + 2)x - 4a - 1 \} = 0$
(i) $x^2 + 2(a + 2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x \neq 1$ 인 경우
 $D = 0$ 이므로, $a^2 + 8a + 5 = 0$
 $\therefore a = -4 \pm \sqrt{11}$
(ii) $x^2 + 2(a + 2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x = 1$ 을 근으로 갖는 경우
 $x = 1$ 을 대입하면 $1 + 2(a + 2) - 4a - 1 = 0$
 $\therefore a = 2$
(i), (ii)에서 $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$

19. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq a \leq 1$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-1 < a < 0$
- ④ $0 \leq a < 1$ ⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 6 \geq 0, (t + 3)(t - 2) \geq 0$
 $\therefore t \leq -3$ 또는 $t \geq 2$
(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때
 $x^2 + 2ax + 3 \leq -3$ 에서 $x^2 + 2ax + 6 \leq 0$
 $y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는
아래로 볼록한 포물선이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.
(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때
 $x^2 + 2ax + 3 \geq 2$ 에서 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
 $x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 1$
(i), (ii)에서 $-1 \leq a \leq 1$

20. 모든 실수 x 에 대하여, 부등식 $k(x^2 - (k-2)x - 3(k-2)) > 0$ 가 성립되게 하는 상수 k 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < k < 2$
- ② $1 < k < 2$
- ③ $1 < k < 4$
- ④ $-1 < k < 3$
- ⑤ $-2 < k < -1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로
 $k > 0 \cdots \textcircled{1}$
 $x^2 - (k-2)x - 3(k-2) > 0$ 이 항상 성립하려면
 $D = (k-2)^2 + 12(k-2) < 0$ 에서
 $(k-2)(k+10) < 0$
 $\therefore -10 < k < 2 \cdots \textcircled{2}$
①, ②에서 $0 < k < 2$

21. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b 의 조건으로 바른 것은?
- ① $a \neq 20, b < 25$

② $a = 20, 0 < b < 25$

③ $a = 20, b > 25$

④ $0 < a < 20, b > 25$

⑤ $0 < a \leq 20, 0 \leq b \leq 25$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리한다
 $\Rightarrow x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$
항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다
 $D' = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$
 $\Rightarrow (20 - a)y + 25 - b < 0$
임의의 x, y 에 대해 성립하려면, $a = 20, b > 25$

22. 이차부등식 $x^2 - 2x - 3 > 3|x - 1|$ 의 해가 이차부등식 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해와 같을 때, 실수 a, c 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > 3x - 3, x^2 - 5x > 0$
 $x(x - 5) > 0, x < 0$ 또는 $x > 5$
 $\therefore x > 5$
2) $x < 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > -3x + 3, x^2 + x - 6 > 0$
 $(x + 3)(x - 2) > 0, x < -3$ 또는 $x > 2$
 $\therefore x < -3$
1), 2)에서 $x < -3$ 또는 $x > 5$
한편 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해가
 $x < -3$ 또는 $x > 5$ 이므로
 $a < 0$ 이고, $ax^2 + 2x + c = a(x + 3)(x - 5)$ 이다.
 $ax^2 + 2x + c = ax^2 - 2ax - 15a$ 에서
 $a = -1, c = 15 \quad \therefore a + c = 14$

23. 두 부등식 $x < -1$, $x > 2$, $2x^2 + (5+2a)x + 5a < 0$ 을 동시에 만족하는 정수 x 의 값이 $x = -2$ 뿐일 때, 실수 a 의 최솟값은? (단, $a < \frac{5}{2}$)

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ -5

해설

$$2x^2 + (5+2a)x + 5a = (2x+5)(x+a) < 0$$

$$-\frac{5}{2} < x < -a \left(\because a < \frac{5}{2} \right)$$

두 부등식을 만족하는 정수가 $x = -2$ 뿐이므로 $-2 < -a \leq 3$

$$\therefore -3 \leq a < 2$$

따라서, 구하는 a 의 최솟값은 -3

24. x 에 대한 두 부등식 $x^2 + (a-1)x < a$, $6x^2 - x - 1 > 0$ 을 동시에 만족하는 정수가 꼭 두 개 존재할 때, 실수 a 의 값의 범위는?
- ① $-4 \leq a < -3$, $2 < a \leq 3$ ② $-3 \leq a < -2$, $3 < a \leq 4$
 ③ $-2 \leq a < -1$, $4 < a \leq 5$ ④ $-4 < a \leq -3$, $2 \leq a < 3$
 ⑤ $-3 < a \leq -2$, $3 \leq a < 4$

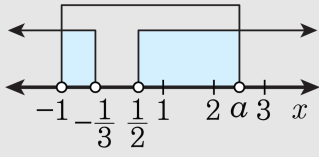
해설

$$6x^2 - x - 1 = (2x-1)(3x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ 또는 } x < -\frac{1}{3} \dots\dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$$x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a) < 0$$

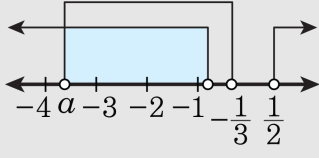
$$(i) a > -1 \text{ 이면 } -1 < x < a \dots\dots\dots \textcircled{\text{B}}$$



①과 ②의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 1과 2)
 $2 < a \leq 3$

(ii) $a = -1$ 이면 해가 없다.

$$(iii) a < -1 \text{ 이면 } a < x < -1 \dots\dots\dots \textcircled{\text{C}}$$



①, ②의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 -3과 -2)
 $\therefore -4 \leq a < -3$

(i),(ii)(iii)에서 $-4 \leq a < -3$, $2 < a \leq 3$

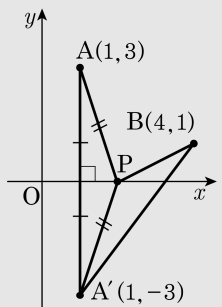
25. 두 점 A (1,3), B (4,1) 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 A (1,3) 을 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
A' (1,-3)
이 때, 다음 그림에서
 $\overline{AP} = \overline{A'P}$
또, $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + \{1-(-3)\}^2} = 5$



26. 두 점 A(1, 3), B(4, m) 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 하면
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 A'B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 A'(1, -3) 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (m+3)^2} = 5$
 $(m+3)^2 + 9 = 25, (m+3)^2 = 16$
 $m+3 = \pm 4 \quad \therefore m = 1 (\because m > 0)$

27. 두 점 A (3, 5), B (1, 1) 이 있을 때, x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되는 점 P 의 좌표와 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① $P\left(\frac{5}{3}, 0\right), 2\sqrt{10}$ ② $P\left(\frac{2}{3}, 0\right), \sqrt{10}$
 ③ $P(1, 0), 2\sqrt{10}$ ④ $P\left(\frac{4}{3}, 0\right), \sqrt{10}$
 ⑤ $P\left(\frac{4}{3}, 0\right), 2\sqrt{10}$

해설

x 축 위의 점 P 에 대하여
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되기 위해서는
 세 점이 일직선상에 있어야 한다.
 따라서 점 B 를 x 축에 대해 대칭 이동시킨다.
 이동된 점 B' (1, -1) 과 점 A 와의 거리가
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이다.

$$\sqrt{(3-1)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

이때 점 P 의 좌표는 점 B' 와 점 A 를 지나는
 직선의 방정식의 x 절편이다.

$$\text{즉 직선 AB'} : y - 5 = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} (x - 3)$$

$$\therefore y = 3x - 4$$

따라서 점 P 의 좌표는 $P\left(\frac{4}{3}, 0\right)$