1. $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1-i)^2 + (1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{(1-2i+i^2) + (1+2i+i^2)}{1-i^2}$$
$$= \frac{2+2i^2}{1-(-1)} = \frac{2-2}{2} = 0$$

2. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2 + y^2 = (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2$
$= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3$
$= 2$

해설

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$
$= 4^2 - 2 \cdot 7$
$= 16 - 14$
$= 2$

3. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

4. BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

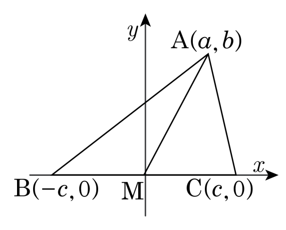
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$ 이므로

$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$

$\therefore \overline{BM}^2 = 13$

$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$

5. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> $A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 라 하면
> $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=$(나)
> $\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=$(다)$(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

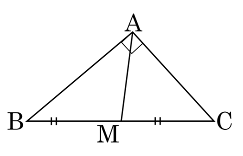
해설

$A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$ 이므로
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

6. 다음은 $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right)$

$= \overline{BC}^2$

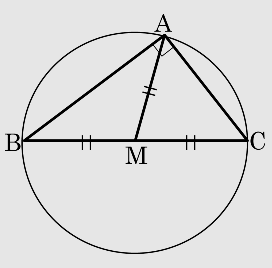
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 3, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$
② 4, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
③ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$
④ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$



이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right) = \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

7. 두 점 $(a,\ 1)$, $(3,\ b)$ 가 x 절편이 4 이고, y 절편이 -2 인 직선 위에 있을 때, ab 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

x 절편이 4 이고,
y 절편이 -2 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1 \cdots ㉠$
점 $(a,\ 1)$ 이 ㉠ 위에 있으므로 $\frac{a}{4}-\frac{1}{2}=1$ 에서
$a=6$
점 $(3,\ b)$ 가 ㉠ 위에 있으므로
$\frac{3}{4}-\frac{b}{2}=1$ 에서 $b=-\frac{1}{2}$
$\therefore ab=-3$

8. 직선 $x+4y=4$ 가 x 축, y 축에 의하여 잘린 부분의 길이는 (가) 이고, 이 직선과 양축에 의하여 둘러싸인 도형의 넓이는 (나) 이다. (가), (나) 에 알맞은 값은?

① $\sqrt{15},\ 2$　　② $4,\ 2\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{17},\ 2$

④ $3\sqrt{2},\ 2$　　⑤ $\sqrt{17},\ 2\sqrt{17}$

해설

$\frac{x}{4}+y=1$ 에서 x 절편은 4,

y 절편은 1 이므로 길이는 $\sqrt{17}$, 넓이는 2

9. x절편이 3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은?

① $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$　② $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$　③ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$
④ $y=2x+1$　⑤ $y=3x+2$

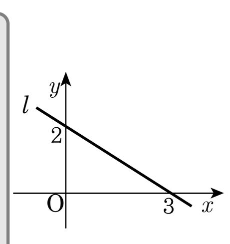
해설

기울기$=\ \frac{2}{3}$

$y=-\frac{2}{3}x+2$

$\frac{2}{3}x+y=2$

$\therefore\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$



10. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x=2, y=3, z=4$
② $x=2, y=3, z=-4$
③ $x=2, y=3, z=5$
④ $x=2, y=-3, z=4$
⑤ $x=3, y=2, z=4$

해설

주어진 식을 모두 더하면
$2(x+y+z)=18,\ x+y+z=9\ \ \cdots㉠$
다시 주어진 식에 ㉠을 각각 대입한다.
$\Rightarrow\ \ x=3,\ \ y=2,\ \ z=4$

11. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=12 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 라 할 때, abc 의 값은?

① -14 ② -7 ③ 0 ④ 7 ⑤ 14

해설

$\begin{cases} 2x+y+z=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y+2z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면 $4(x+y+z)=20$

$\therefore\ x+y+z=5 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉠ − ㉣ 에서 $x=7$

㉡ − ㉣ 에서 $y=-2$

㉢ − ㉣ 에서 $z=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-2,\ c=0$

$\therefore\ abc=0$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+3z=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때, $a(b+c)$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

㉡ − ㉢에서 $2y-x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉣

㉠ + ㉣에서 $4y=2 \quad \therefore\ y=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots$ ㉤

㉠, ㉡, ㉤ 에서 $x=1,\ z=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a(b+c)=1\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

13. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$
\begin{aligned}
& f(x) = (x+1)Q(x) + R \\
\therefore\ & xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR \\
\therefore\ & xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3 \\
& \qquad = (x+1)\left\{xQ(x)\right\} + (x+1)R - R - 3 \\
& \qquad = (x+1)\left\{xQ(x) + R\right\} - R - 3
\end{aligned}
$$

14. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2) \div (\square x^2 + \square x + \square) = x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : −1

해설

$\square x^2 + \square x + \square = A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2) \div A = x+2$

$\therefore\ A = (x^3+4x^2+3x-2) \div (x+2)$

$\therefore\ A = x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

15. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1$, $x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0$, $a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

16. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+\frac{1}{4}q-1=0$ 의 두 근의 차가 1 이 되는 q 의 최솟값은 ?

① $\sqrt{2}$ ② 3 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 5 ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라고 하면,

$\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=\frac{1}{4}q-1$

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{(p+1)^2-4\left(\frac{1}{4}q-1\right)}=1$$

제곱하여 정리하면 $q=(p+1)^2+3$

따라서 q 의 최솟값은 3

17. x가 실수일 때, 이차함수$y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $a < 0$　　ㄴ $4a + b = 0$　　ㄷ $4a - c = -3$

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖는 이차함수는
$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$ 이다.
$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3$ 이므로
$b = -4a,\ c = 4a + 3$ 이다.

18. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다. 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$ 이다. 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때
최대이고 최댓값은 16 이므로
$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16\ (a < 0)$
$\therefore b = -2a,\ c = a + 16 (a < 0) \cdots\cdots$ ㉠
$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}} = |\beta - \alpha| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$
$\therefore\ \sqrt{-64a} = -8a$ 양변을 제곱하면
$-64a = 64a^2,\ \ a^2 = -a,\ a(a+1) = 0$
그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$
$\therefore b = -2a = 2,\ c = a + 16 = 15$
$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$

19. $x^2 + 2y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x + 2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M + m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2 + 2y^2 = 4$에서 $2y^2 = 4 - x^2$
이때, y는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 2$
$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x-2)^2 + 8$
$(-2 \leq x \leq 2)$
따라서 $x = -2$일 때, 최솟값 $m = -8$이고,
$x = 2$일 때, 최댓값 $M = 8$이므로 $M + m = 0$

20. 실수 $x,\ y$가 $2x+y=4$를 만족할 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x+y=4$ 에서 $y=-2x+4 \cdots$ ㉠

㉠에서 $x^2+y^2 = x^2+(-2x+4)^2$

$$= 5x^2-16x+16$$
$$= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16$$
$$= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$$

따라서 x^2+y^2은 $x=\frac{8}{5}$일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$을 갖는다.

21. x에 관한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라. (단, a는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\frac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$에서 $a^2\geq 3$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= (-2a)^2-2(9-2a^2)\\ &= 4a^2-18+4a^2=8a^2-18\end{aligned}$$

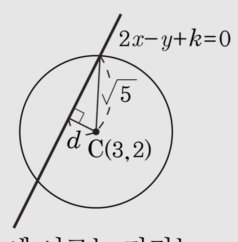
$\therefore a^2+\beta^2\geq 8\times 3-18=6$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 6

22. 점 $A(5,3)$, $B(1,1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $-12<k<-2$ ② $-11<k<-1$ ③ $-10<k<0$
④ $-9<k<1$ ⑤ $-8<k<3$

해설



두 점 $A(5,3)$, $B(1,1)$ 의 중점이 $(3,2)$ 이므로 원의 중심의 좌표는$(3,2)$
점B와 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$
따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$
원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$
원의 중심 $C(3,2)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 에 이르는 거리는

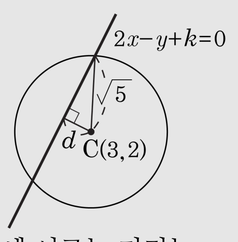
$$d=\frac{|2\cdot 3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$$

$|k+4|<5$, $-5<k+4<5$
$\therefore\ -9<k<1$

23. 점 A(5, 3), B(1, 1)을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

① $-12 < k < -2$　② $-11 < k < -1$　③ $-10 < k < 0$
④ $-9 < k < 1$　⑤ $-8 < k < 3$

해설



두 점 A(5, 3), B(1, 1)의 중점이 $(3,2)$이므로 원의 중심의 좌표는$(3,2)$ 점B와 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5}$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

원의 방정식은$(x-3)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

원의 중심 C$(3,2)$에서 직선 $2x-y+k=0$에 이르는 거리는

$$d = \frac{|2\cdot 3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k+4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$|k+4| < 5$, $-5 < k+4 < 5$

$\therefore\ -9 < k < 1$

24. $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$, $(x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상일 때, r의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3　　② 4　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 = r^2$의 중심은 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 r이고,
원 $(x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$의 중심은 $\left(1, -2\sqrt{2}\right)$, 반지름의 길이는 1이다.
이 때, 두 원의 중심사이의 거리는
$\sqrt{1^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = 3$이고,
두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상이므로 두 원은 만난다.
즉, $r - 1 \le 3 \le r + 1 \quad \therefore 2 \le r \le 4$
따라서, r의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은 $4 + 2 = 6$

25. 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근을 $\dfrac{1}{(1+i)^2}$이라 할 때, $f(2x+3)=0$의 두 근의 합은? (단, a,b,c는 실수)

① -5　② -3　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$\dfrac{1}{(1+i)^2}=\dfrac{1}{1+2i-1}=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{1}{2}i$

$f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-\dfrac{1}{2}i$이면

a,b,c가 실수이므로 다른 한 근은 $\dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ f(x)=0$의 두 근의 합은 0

$f(2x+3)=0$의 두 근을 α,β라 하자.

$(2\alpha+3)+(2\beta+3)=0$

$2(\alpha+\beta)=-6$

$\therefore\ \alpha+\beta=-3$

26. 이차방정식 $x^2 - 2x - 4 = 0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha) = 3,\ f(\beta) = 3,\ f(1) = -2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x) = 0$를 구하면?

① $x^2 - 2x - 4 = 0$　　② $x^2 - 4x - 1 = 0$

③ $x^2 - x - 4 = 0$　　④ $x^2 - x + 4 = 0$

⑤ $x^2 - 2x - 1 = 0$

해설

$x^2 - 2x - 4 = 0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고

$f(x) = ax^2 + bx + c$라 하면

$ax^2 + bx + c = 3$에서 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$

$\therefore -\dfrac{b}{a} = \alpha + \beta = 2$

또, $\dfrac{c-3}{a} = \alpha\beta = -4$

$f(1) = a + b + c = -2$이므로

$a = -b - c - 2,\ b = -2a$에서

$b = -2(-b - c - 2) = 2b + 2c + 4$

$\therefore b + 2c + 4 = 0$

$c - 3 = -4a$에서

$c = -4(-b - c - 2) + 3 = 4b + 4c + 11$

연립하여 풀면 $c = -1,\ b = -2,\ a = 1$

$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 1$

27. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,
$\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$
즉, $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$이다.

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$
$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

28. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$이 허근을 갖기 위한 k의 값이 될 수 없는 것은?

① -2　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$
$x=1$일때 성립하므로 $x-1$을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면
$(x-1)(x^2-2x+-k)=0$
허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$
$\therefore\ k<4$

29. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 모두 구하면?

① -1　　② $0, 8$　　③ $-1, 8$

④ $-1, 0, -8$　　⑤ $-1, 0, 8$

해설

(i) $x=1$을 중근으로 가질 때

$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$

(ii) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때

$D=a^2-8a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 8

(i), (ii)에 의하여 $a=-1,\ 0,\ 8$

30. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$

$\therefore\ \ k=4,\ a=2,\ b=0$

31. 두 부등식 $x^2+2x-15>0$, $x^2-x+k\le 0$에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 6$일 때, 상수 k 의 값은?

① -48　② -30　③ -18　④ 12　⑤ 24

해설

부등식 $x^2+2x-15>0$ 에서
$(x+5)(x-3)>0$, $x>3$ 또는 $x<-5$
부등식 $x^2-x+k\le 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3<x\le 6$ 이므로
$x^2-x+k\le 0$ 를 만족하는 범위는
$-5\le x\le 6$ $(x-6)(x+5)\le 0$
$x^2-x-30\le 0$
$\therefore k=-30$

32. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a+6)x + 6a \le 0 \end{cases}$ 의 정수의 해가 5와 6일 때, a의 값의 범위는 $p < a \le q$이다. 이때, $p + q$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \cdots ㉠ \\ x^2 - (a+6)x + 6a \le 0 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠: $x > 4, x < 2$

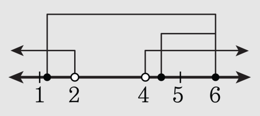
㉡: $(x-6)(x-a) \le 0$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이라면

㉡의 해는 $a \le x \le 6$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이 되도록

수직선으로 나타내면 다음과 같다.



$1 < a \le 5$

$p + q = 1 + 5 = 6$

33. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} (x+a)(x-4) < 0 \\ (x-a)(x-3) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x < 4$가 되도록 하는 실수 a 의 값의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 3 ② -3 ③ 4 ④ -4 ⑤ -7

해설

$(x+a)(x-4) < 0 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-a)(x-3) > 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통해가 $3 < x < 4$이므로
$-a < 4,\ a < 3$ 이어야 한다.
$\therefore$ ㉠의 해는 $-a < x < 4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡의 해는 $x < a$ 또는 $x > 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣의 공통 범위가 $3 < x < 4$ 이려면
$-a \le 3,\ a \le -a$
$\therefore -3 \le a \le 0$
$\therefore M = 0,\ m = -3 \therefore M - m = 3$

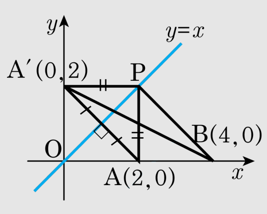
34. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}\,(2,\ 0)\,, \mathrm{B}\,(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}\,(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $\mathrm{A}'\,(0,\ 2)$

이때, 다음 그림에서



$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

35. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A'}(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0\ )$

36. 두 점 A $(3,\ 5)$, B $(1,\ 1)$ 이 있을 때, x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되는 점 P 의 좌표와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$　　② $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

③ $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $2\sqrt{10}$　　④ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$

해설

x 축 위의 점 P 에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되기 위해서는
세 점이 일직선상에 있어야 한다.
따라서 점 B를 X축에 대해 대칭 이동시킨다.
이동된 점 B′ $(1,\ -1)$과 점 A와의 거리가
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이다.

$\sqrt{(3-1)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

이때 점 P의 좌표는 점 B′와 점 A를 지나는
직선의 방정식의 x 절편이다.

즉 직선 AB′ : $y-5=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-3)$

$\therefore\ y=3x-4$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$