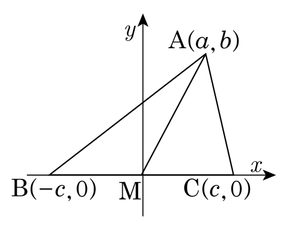
1. 다음은 $\triangle$ABC 에서 변 BC의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> A(a, b), B$(-c, 0)$, C$(c, 0)$ 라 하면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나)
> $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

A(a, b), B$(-c, 0)$, C$(c, 0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\,(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

2. BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

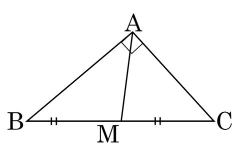
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$ 이므로

$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$

$\therefore \overline{BM}^2 = 13$

$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$

3. 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right)\\ &= \overline{BC}^2\end{aligned}$$

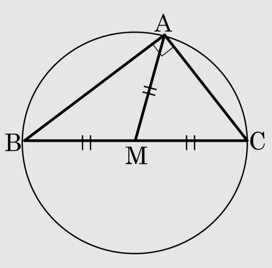
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 3, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$
② 4, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
③ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$
④ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$



이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right)\\ &= \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2\end{aligned}$$

4. 세 점 A$(1,\ 2)$, B$(m,\ 2)$, C$(4,\ n)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$이다. 이때, $m+n$의 값은?

① 2　　② -2　　③ 0　　④ 3　　⑤ -3

해설

$$\left(\frac{1+m+4}{3},\ \frac{2+2+n}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$$

$\therefore 1+m+4=2\ \ ,\ 2+2+n=9$

$\therefore m=-3\ \ ,\ n=5$

$\therefore m+n=2$

5. $\triangle$ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5, 4)$, 변 AB 의 중점의 좌표가 $(-1, 3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$ 일 때, 꼭짓점 B, C 의 좌표를 구하면?

① B$(-5, 2)$, C$(5, 1)$

② B$(-6, 2)$, C$(4, 0)$

③ B$(-7, 2)$, C$(5, 0)$

④ B$(-7, -1)$, C$(4, 0)$

⑤ B$(-7, -2)$, C$(5, -1)$

해설

B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) 으로 놓으면

$\frac{5+x_2}{2} = -1,\ \frac{4+y_2}{2} = 3,$

$\frac{5+x_2+x_3}{3} = 1,\ \frac{4+y_2+y_3}{3} = 2$

$\therefore\ x_2 = -7,\ y_2 = 2,\ x_3 = 5,\ y_3 = 0$

즉, B$(-7, 2)$, C$(5, 0)$

6. 세 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$, $\mathrm{C}(3, 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$일 때, ab의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ 3　⑤ 4

해설

무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$이므로

$\frac{a+1+3}{3}=2$, $\frac{4+b+1}{3}=1$

$a+4=6 \quad \therefore a=2$

$b+5=3 \quad \therefore b=-2$

$\therefore ab=2\times(-2)=-4$

7. 두 점 $(a,\ 1)$, $(3,\ b)$ 가 x 절편이 4 이고, y 절편이 -2 인 직선 위에 있을 때, ab 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

x 절편이 4 이고,
y 절편이 -2 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1\ \cdots$ ㉠
점 $(a,\ 1)$ 이 ㉠ 위에 있으므로 $\frac{a}{4}-\frac{1}{2}=1$ 에서
$a=6$
점 $(3,\ b)$ 가 ㉠ 위에 있으므로
$\frac{3}{4}-\frac{b}{2}=1$ 에서 $b=-\frac{1}{2}$
$\therefore ab=-3$

8. x절편이 3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은?

① $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$　　② $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$　　③ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$

④ $y=2x+1$　　⑤ $y=3x+2$

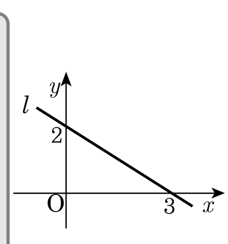
해설

기울기$= \frac{2}{3}$

$y=-\frac{2}{3}x+2$

$\frac{2}{3}x+y=2$

$\therefore\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$



9. 두 점 A$(-1,\ 5)$, B$(3,\ -3)$을 지나는 직선의 x절편은 (　　　)이고, y 절편은 (　　　)이다. 위의 (　　　)안에 알맞는 값을 모두 더하면?

① $\frac{9}{2}$　② 4　③ $\frac{7}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

두 점 A$(-1,\ 5)$, B$(3,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{-3-5}{3-(-1)}(x+1)+5 = -2x+3$

따라서, 직선 $y = -2x+3$ 의 x 절편과 y 절편을 각각 구하면,

$y = 0$ 일 때 $x = \frac{3}{2}$,

$x = 0$ 일 때 $y = 3$

따라서, (　　　)안에 알맞는 값을 모두 더하면

$\therefore\ \frac{3}{2}+3 = \frac{9}{2}$

10. $x+y+z=3,\ xy+yz+zx=-1$ 일 때 $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하면?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+xz) \\ &= 9+2=11 \end{aligned}$$

11. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

12. $x^2 + 2y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x + 2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M + m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2 + 2y^2 = 4$에서 $2y^2 = 4 - x^2$
이때, y는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 2$
$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x-2)^2 + 8$
$(-2 \leq x \leq 2)$
따라서 $x = -2$일 때, 최솟값 $m = -8$이고,
$x = 2$일 때, 최댓값 $M = 8$이므로 $M + m = 0$

13. $x^2 + y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2y + x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$에서 $x^2 = 4 - y^2$
x, y가 실수이므로
$x^2 = 4 - y^2 \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore -2 \leq y \leq 2$
$2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$을 대입하면
$2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$
$= -y^2 + 2y + 4 = -(y-1)^2 + 5$
이 때, $-2 \leq y \leq 2$이므로 $y = 1$일 때
최댓값은 5, $y = -2$일 때 최솟값은 -4이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

14. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20$

$\therefore\ x=\pm2,\ y=\pm4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\mp4$

$(x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

15. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해 : $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = + - 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(복부호동순)

16. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2+y=6 \\ 9x^2-y^2=0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x 값을 모두 더하면?

① 0 ② 15 ③ 10 ④ −10 ⑤ −15

해설

$9x^2-y^2=0$에 $3x^2+y=6$을 대입하면
$9x^2-(-3x^2+6)^2=-9x^4+45x^2-36=0$
$x^4-5x^2+4=(x^2-4)(x^2-1)=0$
$\therefore x=\pm1,\ \pm2$
$\therefore x$의 합은 $+1-1+2-1=0$

17. 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 과 직선 $3x+4y+a=0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, a 의 값 중 정수들의 총합을 구하면?

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 원 중심에서 직선까지 거리가 반지름보다 작아야 한다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{|3\times 1+4\times(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<1$

$\Rightarrow \quad (a-1)^2-25<0$

$\Rightarrow \quad -4<a<6$

$\therefore$ 정수 $a=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

모두 합하면 9

18. $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$, $(x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상일 때, r의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3　② 4　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 = r^2$의 중심은 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 r이고,
원 $(x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$의 중심은 $\left(1, -2\sqrt{2}\right)$, 반지름의 길이는 1이다.
이 때, 두 원의 중심사이의 거리는
$\sqrt{1^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = 3$이고,
두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상이므로 두 원은 만난다.
즉, $r - 1 \le 3 \le r + 1 \quad \therefore 2 \le r \le 4$
따라서, r의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은 $4 + 2 = 6$

19. 원 $x^2 + y^2 = 8$과 직선 $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$　② $0 < k < 4$　③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$　⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$이고

$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$　$\therefore$ $-4 < k < 4$

20. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha-1}$, $\frac{\alpha}{\beta-1}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① 3　② 5　③ 0　④ -3　⑤ -5

해설

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2=7$

$$a=-\left(\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}\right)$$
$$=-\frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$=-\frac{(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=-\frac{7-3}{1-3+1}=4$$
$$b=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)\cdot(\beta-1)}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{1}{1-3+1}=-1$$

$\therefore a+b=4-1=3$

21. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\frac{1}{\beta}$, $\beta^2+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 보기에서 고르면?

① $x^2-10x+3=0$ ② $x^2-10x+5=0$

③ $x^2-3x+3=0$ ④ $x^2-3x+5=0$

⑤ $x^2-5x+7=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=1$

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=10$$

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2\beta^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=5$$

$\therefore\ x^2-10x+5=0$

22. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-6x+4=0$　　② $x^2-3x+4=0$
③ $x^2+6x+5=0$　　④ $x^2+4x+5=0$
⑤ $x^2-4x+5=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α,β이므로 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

두 근의 합 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+3=6$

두 근의 곱 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=4$

$\therefore$ 방정식은 $x^2-6x+4=0$

23. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\} > 0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0 < k < 2$　② $1 < k < 2$　③ $1 < k < 4$
④ $-1 < k < 3$　⑤ $-2 < k < -1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$k > 0 \cdots$ ①
$x^2-(k-2)x-3(k-2) > 0$이 항상 성립하려면
$D = (k-2)^2 + 12(k-2) < 0$에서
$(k-2)(k+10) < 0$
$\therefore \ -10 < k < 2 \cdots$ ②
①, ②에서 $0 < k < 2$

24. 모든 실수 x 에 대해 $x^2-2ax+a+6 \geq 0$ 이기 위한 정수 a 의 개수는?

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2-2ax+a+6 \geq 0$ 이려면

판별식이 허근 또는 중근을 가지면 된다.

$\frac{D}{4} = a^2-(a+6) \leq 0,\ a^2-a-6 \leq 0$

$(a+2)(a-3) \leq 0$

$\therefore\ -2 \leq a \leq 3$

따라서 정수 a 는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 으로

6 개이다.

25. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b>0$이 성립하기 위한 상수 a, b의 조건은?

① $a=5, b>5$ ② $a=10, b>5$ ③ $a=10, b<5$
④ $a=20, b>5$ ⑤ $a=20, b<5$

해설

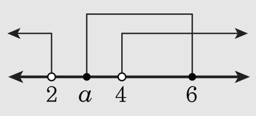
$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b>0$
$x^2+(4y+10)x+4y^2+ay+5b>0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
방정식 $x^2+(4y+10)x+4y^2+ay+5b=0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+5b)<0$
$4y^2+20y+25-4y^2-ay-5b<0$
$(20-a)y+25-5b<0$
이 부등식이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면
$20-a=0,\ 25-5b<0$
$\therefore a=20,\ b>5$

26. 다음 연립방정식의 해가 $4 < x \le 6$이 되도록 실수 a의 값의 범위를 정할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a+6)x + 6a \le 0 \end{cases}$$

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설



$x^2 - 6x + 8 > 0$에서

$(x-2)(x-4) > 0$

$\therefore x < 2$ 또는 $x > 4$

$x^2 - (a+6)x + 6a \le 0$에서

$\Rightarrow (x-a)(x-6) \le 0$

$\therefore$ 두 부등식의 공통부분이 $4 < x \le 6$ 이 되려면

$(x-a)(x-6) \le 0$의 해가 $a \le x \le 6$이어야 하고,

$2 \le a \le 4$ 이어야 한다

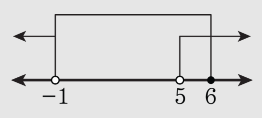
$\therefore a$의 최솟값 : 2, 최댓값 : 4

27. 두 부등식 $-x^2+4x+5<0$,
$x^2+ax-b \le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $5<x\le 6$일 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -11 ④ 11 ⑤ 5

해설

$x^2-4x-5>0$
$(x+1)(x-5)>0$
$x<-1$ 또는 $x>5$
$x^2+ax-b\le 0$
$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)\le 0$ 라 하자
$\alpha \le x \le \beta$
이제 주어진 조건에 만족하려면



$\therefore \alpha=-1, \beta=6$
$\Rightarrow (x+1)(x-6)=x^2-5x-6$
$a=-5, b=6, a+b=1$

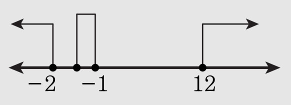
28. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$,
$(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$　② $-3 < a < 8$　③ $-3 < a < 4$
④ $-2 < a < 12$　⑤ $-2 < a < 3$

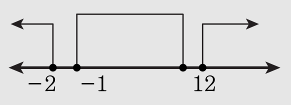
해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 & \cdots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq & \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서
$(x-12)(x+2) \geq 0$
$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 12$ (가)와 (나)의
공통 범위가 존재하지 않으려면 다음 그림에서



$a^2-a > -2 \cdots$(다)



$a^2-a < 12 \cdots$(라)

(다)에서$a^2-a+2>0$, $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

$\therefore$모든 실수
(라)에서 $a^2-a-12<0$, $(a+3)\times(a-4)<0$
$\therefore -3 < a < 4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3 < a < 4$

29. 두 점 A $(3,\ 5)$, B $(1,\ 1)$ 이 있을 때, x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되는 점 P 의 좌표와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① P $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$　　② P $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

③ P $(1,\ 0)$, $2\sqrt{10}$　　④ P $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

⑤ P $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$

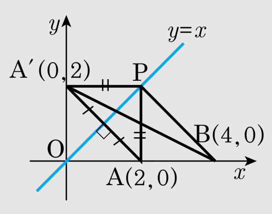
해설

x 축 위의 점 P 에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되기 위해서는
세 점이 일직선상에 있어야 한다.
따라서 점 B를 X축에 대해 대칭 이동시킨다.
이동된 점 B′ $(1,\ -1)$과 점 A와의 거리가
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이다.
$\sqrt{(3-1)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
이때 점 P의 좌표는 점 B′와 점 A를 지나는
직선의 방정식의 x 절편이다.
즉 직선 AB′ : $y-5=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-3)$
$\therefore\ y=3x-4$
따라서 점 P의 좌표는 P $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$

30. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,0)$ 과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{5}$

해설



점 $\mathrm{A}(2,0)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ 2)$

이때, 다음 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

31. 두 점 $\mathrm{A}\,(1,3)$, $\mathrm{B}\,(4,1)$ 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $\mathrm{A}\,(1,3)$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
$\mathrm{A}'\,(1,-3)$
이 때, 다음 그림에서
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$
또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$