

1. 점 (1, 2) 를 중심으로 하고 점(3, -2) 를 지나는 원의 방정식은?

①  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

②  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$

③  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

④  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$

⑤  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을  $r$  이라 하면

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$  이 (3, -2) 를 지나므로

$$(3 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

2. 원  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$  의 반지름의 길이는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 = 2^2$$

3. 지름의 양 끝점이 (3, 0), (5, 2) 인 원의 방정식이  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$  이다.  $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

### 해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,  
중심의 좌표는 (4, 1)이다.

(지름의 길이) =  $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서

반지름의 길이는  $\sqrt{2}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$$

4. 두 원  $O_1, O_2$ 의 중심거리가  $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이  $r_1, r_2$ 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.

② 내접한다.

③ 두 점에서 만난다.

④ 만나지 않는다.

⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$  이므로 두 원은 외접한다.

5. 세 점  $(-1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(6, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표는?

①  $(2, 3)$

②  $(-2, 3)$

③  $(2, -3)$

④  $(-2, -3)$

⑤  $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

### 해설

세 점  $(-1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(6, 0)$ 을 지나는 원의 방정식을  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  이라 하면

이 원이 세점을 지나므로

$$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$$

$$\therefore a - b - c = 2 \cdots \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$$

$$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$$6^2 + 6a + c = 0$$

$$\therefore 6a + c = -36 \cdots \cdots \textcircled{\text{C}}$$

$\textcircled{\Gamma}$ ,  $\textcircled{\text{L}}$ ,  $\textcircled{\text{C}}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 6, c = -12$$

즉,  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$  이므로

표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

따라서, 원의 중심의 좌표는  $(2, -3)$  이다.

6. 다음의  $x, y$  에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

①  $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$

②  $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$

③  $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$

④  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

⑤  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

①  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$

②  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$

③  $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

④  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

⑤  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

7. 점  $(2, 1)$  을 지나고  $x$  축,  $y$  축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

### 해설

원이 점  $(2, 1)$  을 지나고  $x$  축,  $y$  축에 접하면 제 1 사분면에 위치하므로 반지름이  $r$  이면 중심이  $(r, r)$  이다.

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한  $(2, 1)$  을 지나므로

$$(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2 ,$$

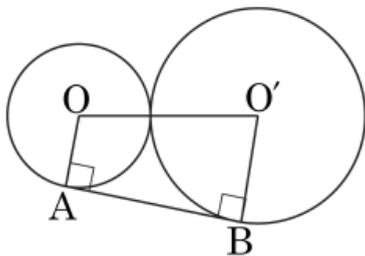
$$(r - 1)(r - 5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

8. 다음 그림의 두 원  $O$  와  $O'$  에서 공통 접선  $\overline{AB}$  의 길이를 구하면?  
(단,  $\overline{OO'} = 5\text{ cm}$  ,  $\overline{OA} = 2\text{ cm}$  ,  $\overline{O'B} = 3\text{ cm}$  이다.)



①  $\sqrt{6}\text{ cm}$

②  $2\sqrt{5}\text{ cm}$

③  $2\sqrt{6}\text{ cm}$

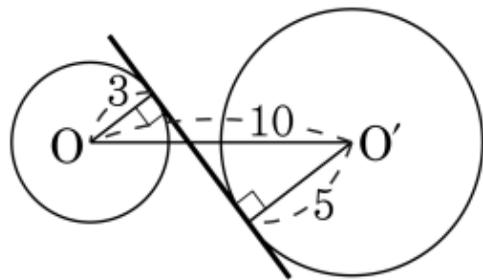
④  $\sqrt{5}\text{ cm}$

⑤  $3\sqrt{5}\text{ cm}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3 - 2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$$

9. 다음 그림의 두 원  $O$ 와  $O'$ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

공통내접선의 길이는  $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

10.  $a$ 를 임의의 실수라 하고, 원  $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1

②  $\sqrt{2}$

③ 2

④  $2\sqrt{2}$

⑤ 3

### 해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서  $a = 2$  일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은  $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$  (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

11. 두 원  $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$  의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  일 때,  $A + B - C$  의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을 지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

12. 두 원  $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$ ,  $2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2 = 0$  의 공통현이 직선  $y = -3x - 1$  과 직교할 때, 상수  $a$  의 값은?

① 1

② 2

③ 4

④ 8

⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$2(x^2 + y^2 - x + 2y - 3) - (2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2) = 0$$

$$\text{즉, } 4x + (4 - a)y - 4 = 0 \dots\dots \text{㉠}$$

직선 ㉠과 직선  $y = -3x - 1$  은 직교하므로

$$\frac{-4}{4 - a} \times (-3) = -1 \text{ 에서 } a = 16$$

13. 중심이 직선  $2x + y = 0$  위에 있고, 두 점  $(3, 0)$ ,  $(0, 1)$  을 지나는 원의 방정식은 ?

①  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

②  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$

③  $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$

④  $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$

⑤  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선  $2x + y = 0$  위에 있으므로 중심을  $(a, -2a)$  라 할 수 있다.

$$(x - a)^2 + (y + 2a)^2 = r^2$$

점  $(3, 0)$  을 지나므로,

$$(3 - a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \text{①}$$

또, 점  $(0, 1)$  을 지나므로,

$$a^2 + (1 + 2a)^2 = r^2 \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

14. 두 점 A(-2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때,  $\triangle ABP$  의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$  이므로

$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

$$\text{따라서, } (x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$

$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$$

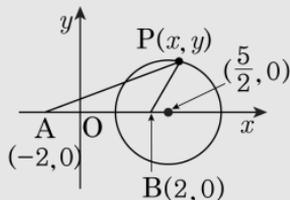
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이  $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$  이고

반지름의 길이가  $\frac{3}{2}$  인 원이다.



$$\therefore \text{ 넓이 } S \text{ 의 최댓값} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$$

15. 두 정점  $A(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $B(\sqrt{2}, 0)$  가 있다. 조건  $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$  를 만족시키는 점  $P(x, y)$  의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$

$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

이것을 정리하면,  $(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$

점  $P$  의 자취는 점  $(-3\sqrt{2}, 0)$  을 중심으로 하고,  
반지름이 5 인 원이다.