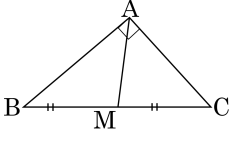


1. 다음은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{\text{㉠}} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{\text{㉡}}^2 \right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$$\boxed{\text{㉡}} = \boxed{\text{㉢}} \overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{\text{㉣}} \left(\boxed{\text{㉤}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2$$

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

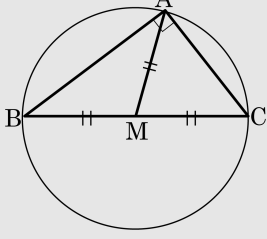
- ① $3, 2\overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ② $4, 2\overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
 ③ $2, \overline{AM}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ④ $2, \overline{AM}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
 ⑤ $\frac{16}{5}, \overline{AM}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2 \right)$$

이 때, $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \text{ 이므로 } \boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2 \left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4} \right) \\ &= \boxed{2} \left(\boxed{\frac{1}{2}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

2. BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$ 가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

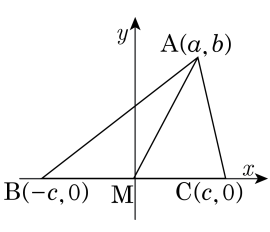
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$$

$$\therefore \overline{BM}^2 = 13$$

$$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$$

3. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a + c)^2 + b^2 + (a - c)^2 + b^2 =$ (가)이고,
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$
 따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 =$ (나)
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ (다) $(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

위

의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
 ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
 ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
 ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
 ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
 $= \{(-c - a)^2 + (0 - b)^2\} + \{(c - a)^2 + (0 - b)^2\}$
 $= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$ 이므로
 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

4. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0 \text{에서 } a^2 \geq 3$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2 - 2(9 - 2a^2) \\ &= 4a^2 - 18 + 4a^2 = 8a^2 - 18\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 \geq 8 \times 3 - 18 = 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값은 6

5. m 이 실수일 때, x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2mx + 2m^2 - 2m - 3 = 0$ 의 두 실근 α, β 에 대하여 $\alpha\beta$ 의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2mx + 2m^2 - 2m - 3 = 0$ 이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = m^2 - (2m^2 - 2m - 3) \geq 0$$

$$m^2 - 2m - 3 \leq 0, (m+1)(m-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 3$$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = 2m^2 - 2m - 3 = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$$

이 때, $-1 \leq m \leq 3$ 이므로 $m = 3$ 일 때

$\alpha\beta$ 의 최댓값은 9이다.

6. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$y = 3 - x \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 3$$

$$2x^2 + y^2 = 2x^2 + (3 - x)^2 = 3(x - 1)^2 + 6$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } m = 6$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } M = 18$$

$$\therefore M - m = 12$$

7. 직선 $y = -3x + 12$ 와 원 $x^2 + (y - 2)^2 = 20$ 의 교점의 좌표를 구하면?

- ① $(1, 2), (3, 5)$ ② $(2, 6), (4, 0)$ ③ $(3, 5), (3, 4)$
④ $(4, 6), (2, 3)$ ⑤ $(5, 5), (3, 3)$

해설

$y = -3x + 12 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
 $x^2 + (y - 2)^2 = 20 \dots\dots\dots \textcircled{2}$ 에서
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $x^2 + (-3x + 10)^2 = 20, x^2 - 6x + 8 = 0,$
 $(x - 2)(x - 4) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $x = 2$ 일 때 $y = 6,$
 $x = 4$ 일 때 $y = 0$ 이므로
구하는 교점의 좌표는 $(2, 6), (4, 0)$

8. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a > -2$ ② $a \geq -1$ ③ $-1 \leq a < 2$
④ $-2 < a \leq 2$ ⑤ $-2 \leq a < 3$

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = a + 2$
중심이 (2, 1) 이고, 반지름이 $\sqrt{a + 2}$ 인 원이다.
 x 축과 만나려면 $\sqrt{a + 2} \geq 1 \cdots \textcircled{1}$
 y 축과 만나지 않으려면 $0 < \sqrt{a + 2} < 2 \cdots \textcircled{2}$
①, ②를 동시에 만족하므로
 $\therefore -1 \leq a < 2$

9. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x 축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
 $x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0$
 $\Rightarrow x = -2, -8$
 $\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$
 $\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

10. $4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$

② 3

③ $4i$

④ 5

⑤ $1+3i$

해설

$$\begin{aligned} & 4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i} \\ &= 4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i} \\ &= 4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= 4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3 \end{aligned}$$

11. $(3 + 4i)^5(15 - 20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 5^7 ② 5^{10} ③ 5^{12} ④ 5^{15} ⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3 + 4i)^5(3 - 4i)^5 \\&= 5^5\{(3 + 4i)(3 - 4i)\}^5 \\&= 5^5(5^2)^5 \\&= 5^{15}\end{aligned}$$

12. $\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $\frac{6}{5}$ ② 2 ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2-i)^2 + (2+i)^2}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{3+3}{5} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

13. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha + 1, \beta + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2 - 3x + 2 = 0$

② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 + 3x - 4 = 0$

④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 + 2x - 3 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = 4,$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 6$$

$\therefore \alpha + 1, \beta + 1$ 을 근으로 하는 방정식은

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

14. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha - 1}, \frac{\alpha}{\beta - 1}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 3, \alpha\beta = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 = 7 \\ a &= -\left(\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}\right) \\ &= -\frac{\beta(\beta - 1) + \alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \\ &= -\frac{(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= -\frac{7 - 3}{1 - 3 + 1} = 4 \\ b &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - 1) \cdot (\beta - 1)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{1}{1 - 3 + 1} = -1 \\ \therefore a + b &= 4 - 1 = 3\end{aligned}$$

15. 이차방정식 $x^2 - 3x + 7 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $2\alpha - 1, 2\beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식 중 이차항의 계수가 1인 것은?

① $x^2 + 4x + 10 = 0$

② $x^2 - 4x + 21 = 0$

③ $x^2 - 4x - 21 = 0$

④ $x^2 + 4x + 23 = 0$

⑤ $x^2 - 4x + 23 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 7 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 7$$

이 때, $2\alpha - 1, 2\beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인

이차방정식은

$$x^2 - (2\alpha - 1 + 2\beta - 1)x + (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 0$$

$$x^2 - \{2(\alpha + \beta) - 2\}x + \{4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1\} = 0$$

$$\therefore x^2 - 4x + 23 = 0$$

16. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $-\frac{8}{9}$

⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2 + 3ax - 2a) = 0$$

i) 중근이 $x=1$ 인 경우

$x=1$ 을 $x^2 + 3ax - 2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$$1 + 3a - 2a = 0$$

$$\therefore a = -1$$

ii) $x^2 + 3ax - 2a = 0$ 이 중근을 갖는 경우

$$\text{판별식 } D = 9a^2 + 8a = 0, \quad a(9a + 8) = 0,$$

$$\therefore a = 0, \quad a = -\frac{8}{9}$$

$$-1 + 0 - \frac{8}{9} = -\frac{17}{9}$$

17. 삼차방정식 $(x-1)(x^2+x+a+1)=0$ 의 실근이 1뿐일 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a > -\frac{3}{4}$

② $a > -\frac{3}{2}$

③ $a > -1$

④ $a > 0$

⑤ $a > 1$

해설

준식의 실근이 1뿐이기 위해서는 $x^2+x+a+1=0$ 의 근이 허근이거나 $x=1$ 을 중근으로 가져야 한다.

(i) 허근을 가질 경우

$$D=1-4(a+1)<0, \quad -3<4a$$

$$\therefore a > -\frac{3}{4}$$

(ii) $x=1$ 을 중근으로 가질 경우

$D=1-4(a+1)=0$ 이고 $1+1+a+1=0$ 을 동시에 만족하는 a 의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $a > -\frac{3}{4}$

18. $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두 근이 $1+i$, $1-i$ 일 때, 이 방정식의 나머지 두 근을 구하면?

① $x = -\frac{-1 + -\sqrt{3}i}{2}$

② $x = \frac{1 + -\sqrt{3}i}{2}$

③ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

④ $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두근이 $1+i$, $1-i$ 이므로

$x^2 - 2x + 2$ 는 $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ 의 인수이다.

따라서,

$$\therefore x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1)$$

$$\therefore x^2 + x + 1 = 0 \text{ 일 때의 근은 } \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

19. 세 함수 $f(x) = -x^2 + x - 2$, $g(x) = ax + a$, $h(x) = x^2 + 4x + 4$ 가 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq g(x) < h(x)$ 를 만족할 때, a 의 정수값은 몇 개 있는가?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

(i) $f(x) \leq g(x)$ 에서 $-x^2 + x - 2 \leq ax + a$,

$\therefore x^2 + (a-1)x + a + 2 \geq 0$

$D = (a-1)^2 - 4(a+2) = a^2 - 6a - 7 \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 7$

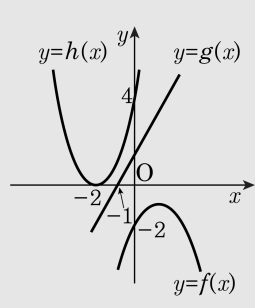
(ii) $g(x) < h(x)$ 에서 $ax + a < x^2 + 4x + 4$

$\therefore x^2 + (4-a)x + 4 - a > 0$

$D = (4-a)^2 - 4(4-a) = a^2 - 4a < 0$

$\therefore 0 < a < 4$

(i)과 (ii)로부터 $0 < a < 4$ 이고 정수는 3개



20. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + px + p$ 가 -3 보다 항상 크기 위한 정수 p 의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 + px + p > -3$$

$$x^2 + px + (p + 3) > 0$$

$$D = p^2 - 4(p + 3) = p^2 - 4p - 12 < 0$$

$$(p - 6)(p + 2) < 0$$

$$-2 < p < 6$$

$$\therefore \text{최대정수 : 5}$$

21. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이 항상 성립할 조건은

$$D/4 = a^2 - 2a - 3 = (a + 1)(a - 3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

a 의 최솟값은 -1

22. 연립부등식
$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 2x^2 + (7 - 2a)x - 7a < 0 \end{cases}$$

을 만족하는 정수가 -3 한 개뿐일 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-3 < a \leq 3$ ② $-3 < a \leq 2$ ③ $-2 < a \leq 7$
 ④ $0 < a \leq 7$ ⑤ $7 < a \leq 10$

해설

$x^2 - 4 > 0$ 에서
 $(x + 2)(x - 2) > 0$
 $\therefore x < -2$ 또는 $x > 2 \cdots \textcircled{㉠}$
 $2x^2 + (7 - 2a)x - 7a < 0$ 에서
 $(2x + 7)(x - a) \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 를 동시에 만족하는 정수가
 -3 뿐이어야 하므로
 a 가 취할 수 있는 범위는 $-3 < a \leq 3$ 이다.

23. 이차부등식 $x^2 - 2x - 3 > 3|x - 1|$ 의 해가 이차부등식 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해와 같을 때, 실수 a, c 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > 3x - 3, x^2 - 5x > 0$
 $x(x - 5) > 0, x < 0$ 또는 $x > 5$
 $\therefore x > 5$
2) $x < 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > -3x + 3, x^2 + x - 6 > 0$
 $(x + 3)(x - 2) > 0, x < -3$ 또는 $x > 2$
 $\therefore x < -3$
1), 2)에서 $x < -3$ 또는 $x > 5$
한편 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해가
 $x < -3$ 또는 $x > 5$ 이므로
 $a < 0$ 이고, $ax^2 + 2x + c = a(x + 3)(x - 5)$ 이다.
 $ax^2 + 2x + c = ax^2 - 2ax - 15a$ 에서
 $a = -1, c = 15 \quad \therefore a + c = 14$

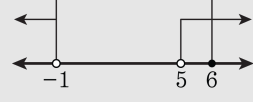
24. 두 부등식 $-x^2 + 4x + 5 < 0$,
 $x^2 + ax - b \leq 0$ 에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두
부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $5 < x \leq 6$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ -11 ④ 11 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 4x - 5 &> 0 \\(x + 1)(x - 5) &> 0 \\x < -1 \text{ 또는 } x > 5 \\x^2 + ax - b &\leq 0 \\\Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) &\leq 0 \text{ 라 하자} \\\alpha \leq x \leq \beta\end{aligned}$$

이제 주어진 조건에 만족하려면



$$\begin{aligned}\therefore \alpha &= -1, \beta = 6 \\\Rightarrow (x + 1)(x - 6) &= x^2 - 5x - 6 \\a &= -5, b = 6, a + b = 1\end{aligned}$$

25. x 축 위의 두 점 $A(2, 0), B(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① 2
- ② $2\sqrt{2}$
- ③ $2\sqrt{3}$
- ④ 4
- ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $A(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$A'(0, 2)$

이때, 다음 그림에서

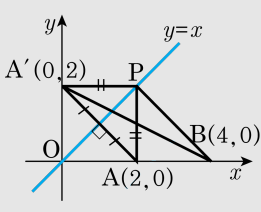
$$\overline{AP} = \overline{A'P}$$

또, $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이

므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



26. 두 점 A (3, 5), B (1, 1) 이 있을 때, x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되는 점 P 의 좌표와 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① $P\left(\frac{5}{3}, 0\right), 2\sqrt{10}$
- ② $P\left(\frac{2}{3}, 0\right), \sqrt{10}$
- ③ $P(1, 0), 2\sqrt{10}$
- ④ $P\left(\frac{4}{3}, 0\right), \sqrt{10}$
- ⑤ $P\left(\frac{4}{3}, 0\right), 2\sqrt{10}$

해설

x 축 위의 점 P 에 대하여
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되기 위해서는
세 점이 일직선상에 있어야 한다.
따라서 점 B를 x 축에 대해 대칭 이동시킨다.
이동된 점 B' (1, -1) 과 점 A 와의 거리가
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이다.

$$\sqrt{(3-1)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

이때 점 P 의 좌표는 점 B' 와 점 A 를 지나는
직선의 방정식의 x 절편이다.

즉 직선 AB' : $y - 5 = \frac{5 - (-1)}{3 - 1}(x - 3)$

$\therefore y = 3x - 4$

따라서 점 P 의 좌표는 $P\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

27. 두 점 A(1, 3), B(4, m) 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 하면
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 A'B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 A'(1, -3) 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (m+3)^2} = 5$
 $(m+3)^2 + 9 = 25, (m+3)^2 = 16$
 $m+3 = \pm 4 \quad \therefore m = 1 (\because m > 0)$