1. $x = 1 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 - 2x + 1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설
$x = 1 - \sqrt{3}i$ 에서
$x - 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면
$(x-1)^2 = (-\sqrt{3}i)^2$
$x^2 - 2x = -4$ 이므로
$x^2 - 2x + 1 = -4 + 1 = -3$

2. $a = 2 + \sqrt{3}i,\ b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{7}$

해설

$a = 2 + \sqrt{3}i,\ b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때

$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \cdots ㉠$

이 때, $a + b = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4$

$ab = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$

$= 2^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 4 + 3 = 7$ 이므로

$a + b = 4,\ ab = 7$ 을 ㉠에 대입하면

$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$

$= \frac{16 - 14}{7} = \frac{2}{7}$

3. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

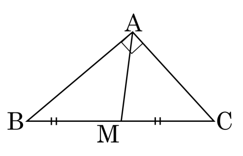
해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2 \\ &= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 4^2 - 2 \cdot 7 \\ &= 16 - 14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

4. 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $3,\ 2\overline{AM},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

② $4,\ 2\overline{AM},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

③ $2,\ \overline{AM},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$

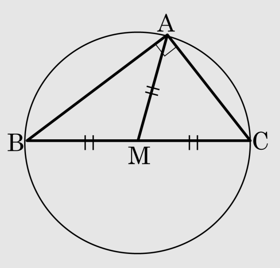
④ $2,\ \overline{AM},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$

⑤ $\frac{16}{5},\ \overline{AM},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$$



이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right) = \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

5. BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

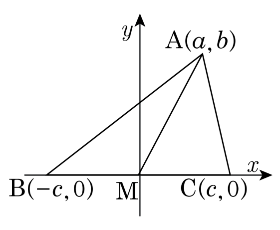
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$이므로

$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$

$\therefore \overline{BM}^2 = 13$

$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$

6. 다음은 $\triangle$ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고, $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나) $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\ (\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

7. 세 점 A(2, a), B(3, 4), C(b, -2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, $a-b$는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

세 점 A(2, a), B(3, 4), C(b, -2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 2)이므로,

$\frac{2+3+b}{3}=1$에서 $b=-2$

$\frac{a+4-2}{3}=2$에서 $a=4$

$\therefore\ a-b=6$

8. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(2,\ -1)$, B $(-3,\ 5)$, C $(a,\ b)$이고 무게중심의 좌표가 G $(-1,\ 1)$일 때, a와 b의 차 $a-b$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 5

해설

세 점을 알 때 무게중심을 구하는 공식에서

$\{2+(-3)+a\} \div 3 = -1$

$\therefore a = -2$

$\{(-1)+5+b\} \div 3 = 1$

$\therefore b = -1$

따라서, $a-b$의 값은 $-2-(-1)=-1$

9. 세 점 A$(1,\ 2)$, B$(m,\ 2)$, C$(4,\ n)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$이다. 이때, $m+n$의 값은?

① 2　　② -2　　③ 0　　④ 3　　⑤ -3

해설

$\left(\frac{1+m+4}{3},\ \frac{2+2+n}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$

$\therefore 1+m+4=2$, $2+2+n=9$

$\therefore m=-3$, $n=5$

$\therefore m+n=2$

10. 다음 중 x 절편이 -1 이고, y 절편이 2 인 직선의 방정식은?

① $x-2y-2=0$ ② $-x+2y=0$ ③ $x+y+1=0$
④ $x+2y+2=0$ ⑤ $2x-y+2=0$

해설

$\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{2}=1 \Rightarrow \quad \therefore\ 2x-y+2=0$

11. 직선 $x+4y=4$ 가 x 축, y 축에 의하여 잘린 부분의 길이는 (가) 이고, 이 직선과 양축에 의하여 둘러싸인 도형의 넓이는 (나) 이다. (가), (나) 에 알맞은 값은?

① $\sqrt{15},\ 2$　　② $4,\ 2\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{17},\ 2$

④ $3\sqrt{2},\ 2$　　⑤ $\sqrt{17},\ 2\sqrt{17}$

해설

$\frac{x}{4}+y=1$ 에서 x 절편은 4,

y 절편은 1 이므로 길이는 $\sqrt{17}$, 넓이는 2

12. x절편이 3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은?

① $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ② $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ ③ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$

④ $y=2x+1$ ⑤ $y=3x+2$

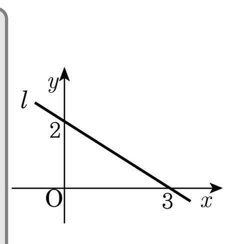
해설

기울기$=\ \frac{2}{3}$

$y=-\frac{2}{3}x+2$

$\frac{2}{3}x+y=2$

$\therefore\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$



13. m이 실수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\ge 0$

$m^2-2m-3\le 0, (m+1)(m-3)\le 0$

$\therefore -1\le m\le 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$

이 때, $-1\le m\le 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

14. x에 관한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라. (단, a는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\frac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\ge 0$에서 $a^2\ge 3$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2-2(9-2a^2) \\ &= 4a^2-18+4a^2=8a^2-18\end{aligned}$$

$\therefore \alpha^2+\beta^2\ge 8\times 3-18=6$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 6

15. $x^2+2y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$

이때, y는 실수이므로 $2y^2=4-x^2\ge 0$

$\therefore -2\le x\le 2$

$4x+2y^2=4x+4-x^2=-(x-2)^2+8$

$(-2\le x\le 2)$

따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $m=-8$이고,

$x=2$일 때, 최댓값 $M=8$이므로 $M+m=0$

16. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x 값을 모두 더하면?

① 0　② 15　③ 10　④ −10　⑤ −15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$ 에 $3x^2 + y = 6$ 대입.
$9x^2 - (3x^2 - 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$
$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$
$x = \pm 1,\ \pm 2$
x 의 합 : $+1 - 1 + 2 - 2 = 0$

17. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3},\ y = -\sqrt{3}$ ② $x = 2,\ y = 1$

③ $x = -\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}$ ④ $x = -2,\ y = -1$

⑤ $x = 2,\ y = -1$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해는 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ (복호동순)

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

ⅰ) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ⅱ) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

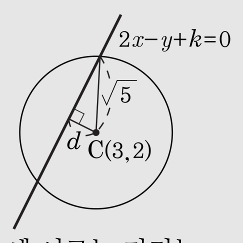
ⅰ), ⅱ) 에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$ 이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

19. 점 A$(5,3)$, B$(1,1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $-12<k<-2$ ② $-11<k<-1$ ③ $-10<k<0$
④ $-9<k<1$ ⑤ $-8<k<3$

해설



두 점 A$(5,3)$, B$(1,1)$ 의 중점이 $(3,2)$ 이므로 원의 중심의 좌표는$(3,2)$
점B와 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$
따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$
원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$
원의 중심 C$(3,2)$에서 직선 $2x-y+k=0$에 이르는 거리는

$$d=\frac{|2\cdot 3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$$

$|k+4|<5$, $-5<k+4<5$
$\therefore\ -9<k<1$

20. 좌표평면 위에 다음과 같은 한 직선과 두 원이 있다.

$y = mx + 3 \cdots$ ㉠ $x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉡ $x^2 + y^2 = 4 \cdots$ ㉢

직선 ㉠은 원 ㉡와 만나지 않고, 원 ㉢과는 공유점을 가질 때, m 의 값의 범위를 구하시오.(단, $m > 0$)

① $\sqrt{5} \le m < 2\sqrt{3}$
② $\sqrt{5} \le m < 2\sqrt{2}$
③ $\sqrt{5} \le m < 4$
④ $\frac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{3}$

해설

원과 직선이 만나지 않으면 원 중심에서 직선까지의 거리가 반지름보다 크고 공유점이 있으면 반지름 이하이다.

$\Rightarrow$ i) ㉡ 와 안 만날 때 : $\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} > 1$

ii) ㉢ 과 공유점을 가질 때 : $\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} \le 2$

$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2},\ m \le -\frac{\sqrt{5}}{2}$

또는 $m \ge \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \ \frac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{2}\ (\because m > 0)$

21. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

$a = -9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ $\therefore$ 19 개

22. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,
$\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$
즉, $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$이다.

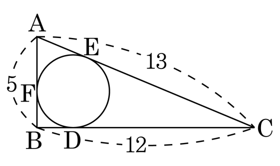
$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

23. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$라 할 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$　　② $x^2 + 5x + 6 = 0$

③ $x^2 - 12x + 20 = 0$　　④ $x^2 + 12x + 20 = 0$

⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha$, $\overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta$,
$\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$
그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$이므로
$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$
$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$
$\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$
두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$
$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

24. n이 자연수이고 α_n, β_n이 이차방정식 $(n+\sqrt{n(n-1)})x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$의 두 실근일 때, $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{49})$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$

근과 계수의 관계에 따라

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

$\alpha_1+\beta_1=\sqrt{1}-0$

$\alpha_2+\beta_2=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\vdots$

$\alpha_{49}+\beta_{49}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{49})$

$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{49}+\beta_{49})$

$=1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

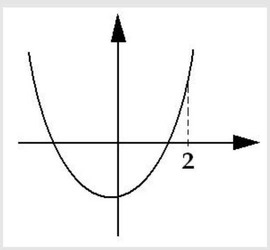
$=\sqrt{49}=7$

25. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ······㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k의 최댓값은 1이다.

26. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \ge 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3　　② $2\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{2}$　　⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로

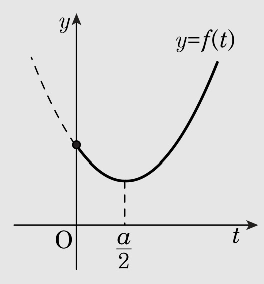
$|x| = t\ (t \ge 0)$ 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \ge 0$

$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$

$t \ge 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \ge 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \ge 0$



$-\frac{a^2}{4} + 2 \ge 0,\ a^2 - 8 \le 0$

$-2\sqrt{2} \le a \le 2\sqrt{2}$

그런데 $a > 0$ 이므로

$0 < a \le 2\sqrt{2}$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

27. x에 대한 이차함수 $y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$의 값이 모든 실수 x에 대하여 항상 양이 되는 실수 a의 값의 집합을 A라 하고, 항상 음이 되는 실수 a 의 값의 집합을 B 라 할 때, $A \cup B$는?

① $\{a \mid a<6\}$ ② $\{a \mid a \le 6\}$ ③ $\{a \mid 3<a<6\}$
④ $\{a \mid 3 \le a \le 6\}$ ⑤ $\{a \mid a>3\}$

해설

$y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$이 이차함수이므로 $a \neq 3$
이 때, 이차방정식 $(a-3)x^2-2(a-3)x+3=0$의 판별식을 D라 하자.
(i) 항상 양일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y>0$이려면 $a-3>0$, 즉 $a>3$이고
$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$
$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore A=\{a \mid 3<a<6\}$
(ii) 항상 음일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y<0$이려면 $a-3<0$, 즉 $a<3$ 이고
$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$
$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore B=\varnothing$
(i), (ii)에서 $A \cup B=\{a \mid 3<a<6\}$

28. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} (x+a)(x-4) < 0 \\ (x-a)(x-3) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x < 4$가 되도록 하는 실수 a 의 값의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M - m$의 값을 구하면?

① 3　　② -3　　③ 4　　④ -4　　⑤ -7

해설

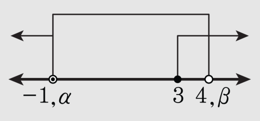
$(x+a)(x-4) < 0 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-a)(x-3) > 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통해가 $3 < x < 4$이므로
$-a < 4,\ a < 3$ 이어야 한다.
$\therefore$ ㉠의 해는 $-a < x < 4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡의 해는 $x < a$ 또는 $x > 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣의 공통 범위가 $3 < x < 4$ 이려면
$-a \le 3,\ a \le -a$
$\therefore -3 \le a \le 0$
$\therefore M = 0,\ m = -3 \therefore M - m = 3$

29. 두 부등식 $x^2-2x-3>0$,
$x^2+ax+b\le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 4$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -7 ③ -8 ④ -9 ⑤ -10

해설

$(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow \quad x<-1$ 또는 $x>3$
$x^2+ax+b\le 0 \Rightarrow \alpha\le x\le\beta$ 라 하자
주어진 조건을 만족하려면



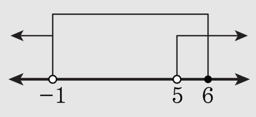
$\therefore \alpha=-1, \beta=4$
$(x+1)(x-4)=x^2-3x-4$
$a=-3, b=-4$
$\therefore a+b=-7$

30. 두 부등식 $-x^2 + 4x + 5 < 0$,
$x^2 + ax - b \leq 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $5 < x \leq 6$일 때, $a + b$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -11 ④ 11 ⑤ 5

해설

$x^2 - 4x - 5 > 0$
$(x+1)(x-5) > 0$
$x < -1$ 또는 $x > 5$
$x^2 + ax - b \leq 0$
$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta) \leq 0$ 라 하자
$\alpha \leq x \leq \beta$
이제 주어진 조건에 만족하려면



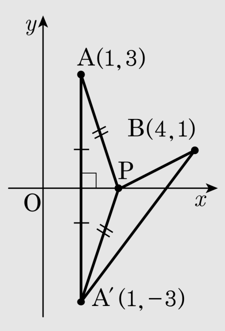
$\therefore \alpha = -1, \beta = 6$
$\Rightarrow (x+1)(x-6) = x^2 - 5x - 6$
$a = -5, b = 6, a + b = 1$

31. 두 점 $\mathrm{A}(1,3)$, $\mathrm{B}(4,1)$ 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



점 $\mathrm{A}(1,3)$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
$\mathrm{A}'(1,-3)$
이 때, 다음 그림에서
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$
또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$

32. 두 점 A $(3,\ 5)$, B $(1,\ 1)$ 이 있을 때, x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되는 점 P 의 좌표와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$　　② $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

③ $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $2\sqrt{10}$　　④ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$

해설

x 축 위의 점 P 에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되기 위해서는
세 점이 일직선상에 있어야 한다.
따라서 점 B를 X축에 대해 대칭 이동시킨다.
이동된 점 B′ $(1,\ -1)$과 점 A와의 거리가
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이다.
$\sqrt{(3-1)^2+(5-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
이때 점 P 의 좌표는 점 B′ 와 점 A 를 지나는
직선의 방정식의 x 절편이다.
즉 직선 AB′ : $y-5=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-3)$
$\therefore\ y=3x-4$
따라서 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$

33. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A'}(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm 4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0\ )$