

1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점 $(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

② $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$

③ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

④ $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$

⑤ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$(3 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

2. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 의 반지름의 길이는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 4 = 2^2 \end{aligned}$$

3. 지름의 양 끝점이 (3, 0), (5, 2)인 원의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$ 이다. $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 (4, 1)이다.
(지름의 길이) = $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$

4. 두 원 O_1 , O_2 의 중심거리가 $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1 , r_2 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치에 관계에 있는가?

- ① 외접한다. ② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다. ④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

5. 세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$

② $(-2, 3)$

③ $(2, -3)$

④ $(-2, -3)$

⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이라 하면

이 원이 세점을 지나므로

$$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$$

$$\therefore a - b - c = 2 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$$

$$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$6^2 + 6a + c = 0$$

$$\therefore 6a + c = -36 \cdots \cdots \textcircled{C}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 6, c = -12$$

즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로

표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$ 이다.

6. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

- ① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$ ④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

- ① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$
② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$
③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

7. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면

제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면

중심이 (r, r) 이다.

$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,

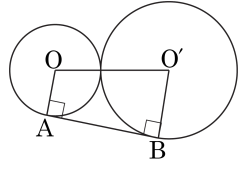
$(r-1)(r-5) = 0$

$\therefore r = 1$ 또는 5

$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$\therefore 1 + 5 = 6$

8. 다음 그림의 두 원 O 와 O' 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면?
(단, $\overline{OO'} = 5\text{ cm}$, $\overline{OA} = 2\text{ cm}$, $\overline{O'B} = 3\text{ cm}$ 이다.)

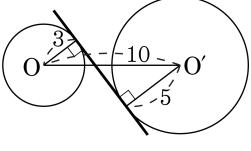


- ① $\sqrt{6}\text{ cm}$ ② $2\sqrt{5}\text{ cm}$ ③ $2\sqrt{6}\text{ cm}$
 ④ $\sqrt{5}\text{ cm}$ ⑤ $3\sqrt{5}\text{ cm}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3 - 2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$$

9. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

10. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

11. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

12. 두 원 $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2 = 0$ 의 공통현이 직선 $y = -3x - 1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 4
- ④ 8
- ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
 $2(x^2 + y^2 - x + 2y - 3) - (2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2) = 0$
즉, $4x + (4 - a)y - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $y = -3x - 1$ 은 직교하므로
 $\frac{-4}{4 - a} \times (-3) = -1$ 에서 $a = 16$

13. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

- ① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$
② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$
④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

14. 두 점 A(-2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, △ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

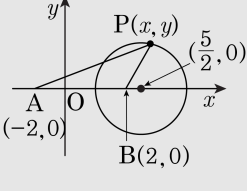
$$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$
$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$
$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$
$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$
$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

15. 두 정점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$
$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

이것을 정리하면, $(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$
점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.