1. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면

$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$

$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로

$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$

$\therefore\ a=b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=16$

2. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가
$(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면
$P(-1) = P(3) = 0$
$P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \ \therefore \ a - b = -7$
$P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \ \therefore \ 3a + b = -81$
$\therefore \ a = -22, \ b = -15$

3. 다항식 $(x-1)^3+27$을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$

② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$

④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$을 A로 치환하면
준 식 $=A^3+27=(A+3)(A^2-3A+9)$
다시 $x-1$을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

4. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

5. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ 을 간단히 하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2i}{2} = i$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} = i^{2008}$$

$$= (i^4)^{502} = 1$$

6. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$

④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$(\text{준식}) = (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi)$$
$$= (6-2a-2b)+(2a+4b)i$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

7. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$x^2+1=tx$

$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로

$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

8. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$ 이면 다른 한 근은 $1-2i$ 이다.

(두 근의 합) $= (1+2i) + (1-2i) = -a$ ……㉠

(두 근의 곱) $= (1+2i)(1-2i) = b$ ……㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서

$a = -2,\ b = 5$ 이다.

9. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

10. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2}$ $\quad\therefore\ k = -\frac{1}{2}$

11. 방정식 $x^3 - x = 0$의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -1$

▷ 정답: $x = 0$

▷ 정답: $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$\therefore\ x = -1, 0, 1$

12. x에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$의 한 근이 -1이므로 $x = -1$을 대입하면

$(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$

$\therefore\ k = 3$

13. 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=1 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $y=2$

▷ 정답 : $z=3$

해설

①+②에서 $3x+2y=7$ $\cdots\cdots$④

①+③에서 $2x+3y=8$ $\cdots\cdots$⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$

이 값을 ①에 대입하면 $z=3$

$\therefore\ x=1,\ y=2,\ z=3$

14. 방정식 $a^2-(1+x)a+2x-2=0$의 해가 무수히 많을 때, 방정식 $x=(x+3)a-10$의 해는?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$a^2-a-ax+2x-2=0$, $(a-2)x=a^2-a-2$

$(a-2)x=(a-2)(a+1)$

i) $a\neq 2$일 때, $x=a+1$

ii) $a=2$일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

i), ii) 에서 $a=2$일 때이다.

따라서 방정식 $x=(x+3)a-10$에 $a=2$를 대입하면

$x=(x+3)\cdot 2-10, x=2x-4 \ \therefore x=4$

15. $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0, x(2x - 1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0, \ (x + 1)(2x - 3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $\frac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

16. 이차방정식 $x^2 - 2ax + 2a + 4 = 0$의 두 근이 모두 정수일 때, 정수 a 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근을 α, β라 하면

$x^2 - 2ax + 2a + 4 = (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore \alpha + \beta = 2a,\ \alpha\beta = 2a + 4$

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 4$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$

α, β는 정수이므로

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 6), (6, 2), (0, -4), (-4, 0)$

$\therefore a = 4, -2$

17. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2 , 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 조건에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$

$f(2x+1)=0$에서

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1)=0$ 의 근은 $\dfrac{\alpha-1}{2}$, $\dfrac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$

$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$

18. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은

$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$

준식을 x에 관해서 정리하면,

$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$

따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$

즉 $m^2-3m-10=0$

$(m-5)(m+2)=0 \quad \therefore\ m=5,\ -2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$

$(m-3)(m+6)<0 \quad \therefore\ -6<m<3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

19. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

20. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$

$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서

$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

21. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$

① 4 ② −4 ③ −2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$

$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$

(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$

$\therefore x=1\pm i$

따라서 (i), (ii)에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2=1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y=x-3$을 이차식에 대입하면

$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$

$x^2-3x+2=0$

$\therefore\ x=1, 2$

(i) $x=1$일 때 $y=-2$

(ii) $x=2$일 때 $y=-1$

따라서 $xy=-2$

23. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 \quad \cdots ② \end{cases}$

①식 인수분해 : $(2x - y)(x - y) = 0$

$\therefore\ y = 2x, y = x$

②식에 대입하면

$y = 2x \rightarrow 5x^2 - (2x)^2 = 4,$

$x^2 = 4,\ x = \pm 2, y = \pm 4$

$y = x \rightarrow 5x^2 - x^2 = 4,\ 4x^2 = 4$

$x^2 = 1,\ x = \pm 1, y = \pm 1$

$x = \alpha, y = \beta$에서

$\alpha + \beta$: $2 + 4 = 6,\ -2 - 4 = -6$

$1 + 1 = 2\ ,\ -1 - 1 = -2$

$\therefore \alpha + \beta$의 최댓값은 6

24. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y,\ y-1$은 실수이므로 $x+2y=0,\ y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

25. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $xf(x)+3$을 $x-1$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 바르게 나열한 것은?

① $Q(x),\ R$
② $Q(x),\ R+3$
③ $xQ(x), R$
④ $xQ(x),\ R+3$
⑤ $xQ(x)+R,\ R+3$

해설

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

$$\begin{aligned} xf(x)+3 &= (x-1)xQ(x)+Rx+3 \\ &= (x-1)xQ(x)+R(x-1)+R+3 \\ &= (x-1)\{xQ(x)+R\}+R+3 \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫 : $xQ(x)+R$, 나머지 : $3+R$