1. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$
$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 α, β, γ, δ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

2. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

3. 사차방정식 $x^4+2x^3+2x^2-2x-3=0$의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$　② $\sqrt{2}i$　③ -2
④ -1　⑤ 1

해설

(준식)$=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)=0$
실근의 합은 $1+(-1)=0$
허근의 합은 -2
모든 근의 합은 -2

4. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2　② -1　③ 0　④ 6　⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$x = 1,\ x = -1$을 대입하면 성립하므로

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

$= (x-1)(x+1)(x^2 + x - 6)$

$= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ -1,\ 1,\ 2$

따라서 최대의 근은 2

5. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

6. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

7. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

8. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

9. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore \ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

10. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　② $-1+\sqrt{2}$, -3　③ $1-\sqrt{2}$, 3
④ $1-\sqrt{2}$, -3　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

11. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

12. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면
$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$
$\therefore\ a \neq \pm 1$
따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

13. 다음 연립방정식을 만족하는 (x, y, z)가 바르게 짝지어진 것은?

$$3x-y=y+z=3x-z=1$$

① $(1, 1, 1)$　② $(-1, 1, 2)$　③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$　⑤ $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

해설

$3x-y=1,\ y+z=1,\ 3x-z=1$

변변끼리 모두 더하면, $6x=3,\ x=\frac{1}{2}$

각각 대입하면, $y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=4 & \cdots\cdots ① \\ x-y-2z=3 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-3z=-1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y,\ z$를 순서대로 구하면?

① $-1, 0, 1$　② $5, -1, 1$　③ $4, 0, 1$

④ $4, -1, 1$　⑤ $4, -1, 3$

해설

① − ② 에서 $2y+3z=1 \cdots\cdots$ ④
② − ③ 에서 $-3y+z=4 \cdots\cdots$ ⑤
④ − ⑤ × 3에서 $y=-1$을 ⑤에 대입하면 $z=1$
또, $y=-1,\ z=1$ 을 ①에 대입하면 $x=4$
$\therefore\ x=4,\ y=-1,\ z=1$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+3z=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때, $a(b+c)$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

㉡ − ㉢에서 $2y-x=0$ ·················· ㉣

㉠ + ㉣에서 $4y=2 \quad \therefore\ y=\frac{1}{2}$ ········· ㉤

㉠, ㉡, ㉤ 에서 $x=1,\ z=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a(b+c)=1\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

16. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=12 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$라 할 때, abc 의 값은?

① -14　　② -7　　③ 0　　④ 7　　⑤ 14

해설

$\begin{cases} 2x+y+z=12 \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+z=3 \cdots\cdots ㉡ \\ x+y+2z=5 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면 $4(x+y+z)=20$
$\therefore\ x+y+z=5 \cdots\cdots$ ㉣
㉠ − ㉣ 에서 $x=7$
㉡ − ㉣ 에서 $y=-2$
㉢ − ㉣ 에서 $z=0$
$\therefore\ a=7,\ b=-2,\ c=0$
$\therefore\ abc=0$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x=2, y=3, z=4$
② $x=2, y=3, z=-4$
③ $x=2, y=3, z=5$
④ $x=2, y=-3, z=4$
⑤ $x=3, y=2, z=4$

해설

주어진 식을 모두 더하면
$2(x+y+z)=18,\ x+y+z=9\ \ \cdots$ ㉠
다시 주어진 식에 ㉠을 각각 대입한다.
$\Rightarrow\ \ x=3,\ \ y=2,\ \ z=4$

18. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$,

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2$,

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \ \cdots \ ㉠ \\ x - y = 1 \ \cdots \ ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore \ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

21. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$　　② 4　　③ $-3\sqrt{2}$

④ -4　　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$ 에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

ⅰ) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ⅱ) $x=2y$ 일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x - y)(x - 2y)$

$\Rightarrow \quad (x - y)(x - 2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ii) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$
$\therefore \quad ab=2$