

1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$	㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

- ㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.
- ㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- ㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < 1$

② $-1 < m < 1$

③ $m < -1$ 또는 $m > 1$

④ $m > 1$

⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$$D/4 = 1 - m < 0$$

$$\therefore m > 1$$

3. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라고 할 때 $|\alpha - \beta|$ 는 다음 중 어느 것과 같은가?

① $\frac{\sqrt{D}}{a}$

② $\frac{-\sqrt{D}}{a}$

③ $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\frac{\sqrt{D}}{|a|}$

⑤ $-\frac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ (단, } D = b^2 - 4ac \text{)}$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right|$$

$$= \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2a} \right|$$

$$= \left| \frac{2\sqrt{D}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

4. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

두근의 합 : 3, 두근의 곱 : 1

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 7\end{aligned}$$

5. 이차방정식 $2x^2 - x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2}$$

6. 이차방정식 $x^2 - 10x + k = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3이 되도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α 라 하면
다른 한 근은 3α 가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 10 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2\alpha \times 3\alpha = k & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②를 풀면

$$\alpha = 2, k = 6 \times 2^2 = 24$$

7. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -1$

해설

(두 근의 곱) = $a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$

8. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$$x = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4$$

$$= \{x - (-1 + 3\sqrt{3}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{3}i)\}$$

$$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

9. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)
- ① 오직 한 실근을 갖는다.
 - ② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 - ③ 중근을 갖는다.
 - ④ 실근을 갖는다.
 - ⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \frac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

10. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$ 의 근을 판별하면?
(단, a, b, c 는 서로 다른 양의 실수이다.)

- ① 서로 다른 두 허근
- ② 서로 다른 두 실근
- ③ 서로 같은 두 실근
- ④ 서로 다른 두 허근
- ⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

11. a 가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x 에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 실근을 가진다.
 - ② $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
 - ③ $f(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 허근을 가진다.
 - ④ $g(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
 - ⑤ $g(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1,$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a-1$$

모든 실수 a 에 대하여

$$2a+1 > 2a-1,$$

즉, $D_1 > D_2$ 이므로 $D_1 < 0$ 이면 $D_2 < 0$

12. x 의 이차방정식 $x^2 - (2a + 2 + m)x + a^2 + 4a - n = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n 을 정할 때, $m + n$ 의 값은?

① -3

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 4

해설

$$D = (2a + 2 + m)^2 - 4(a^2 + 4a - n) = 0$$

이 등식을 a 에 관하여 정리하면

$$4a(m - 2) + m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

이 등식이 a 에 관계없이 항상 성립하려면

$$4(m - 2) = 0, m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

$$\therefore m = 2, n = -4 \quad \therefore m + n = -2$$

13. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

- ① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형
③ $a=b$ 인 이등변삼각형
④ $b=c$ 인 이등변삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
 $(a-c)x^2+2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
 $D=0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$
즉 $b^2-a^2+c^2=0$
 $\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

14. $x^2 - 4kx + (5 - k^2) = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} D/4 &= 4k^2 - (5 - k^2) \geq 0 \\ 4k^2 - 5 + k^2 &\geq 0, 5k^2 \geq 5, \therefore k^2 \geq 1 \\ \alpha + \beta &= 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2 \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \\ 18k^2 &\geq 18, 18k^2 - 10 &\geq 18 - 10 \\ \alpha^2 + \beta^2 &\geq 8, \therefore (\text{최솟값}) = 8 \end{aligned}$$

15. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이고, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5$$

16. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2ax + 4b + 2 = 0$ 의 두 근의 차가 2가 되도록 하는 실수 a, b 에 대하여 b 의 최솟값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

두 근의 차가 2이므로

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4$$

$$(2a)^2 - 4(4b + 2) = 4$$

$$\therefore a^2 - (4b + 2) = 1, \quad b = \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}$$

$$\therefore b \text{의 최솟값은 } -\frac{3}{4}$$

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 10x + m^2 - 2m = 0$ 의 두 근의 비가 $2 : 3$ 일 때, m 의 값은? (단, $m > 1$)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

한 근을 2α 라고 하면 다른 한 근은 3α 이다

근과 계수와의 관계를 이용하면

$$2\alpha + 3\alpha = 5\alpha = 10, \alpha = 2$$

$$\therefore (2\alpha) \times (3\alpha) = 6\alpha^2 = m^2 - 2m$$

$$\therefore m^2 - 2m - 24 = 0$$

$$(m + 4)(m - 6) = 0 \quad \therefore m = 6 \quad (\because m > 1)$$

18. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left| \frac{bc}{a^2} \right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

두 근의 곱 $= \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

두 근의 합 $= -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$

$\therefore \left| \frac{bc}{a^2} \right| = \left| \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} \right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

19. x 에 대한 실수 계수의 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 근의 공식을 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 로 잘못 기억하고 풀어 두 근이 $-1, 2$ 를 얻었다. 이 방정식을 바르게 풀 때, 두 근의 합은?

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

잘못 기억한 근의 공식에서

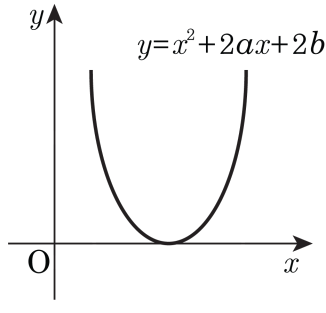
두 근을 합하면 $-\frac{2b}{a}$ 이므로

$-\frac{2b}{a} = -1 + 2 = 1$ 이다.

따라서 준 식은 $-2bx^2 + bx + c = 0$ 이 되고

따라서 (두근의 합) $= -(-\frac{b}{2b}) = \frac{1}{2}$

20. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
- ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
- ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b - 1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

21. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y - 1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y - 1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x = -(y - 1) \pm \sqrt{(y - 1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$
$$= -(y - 1) \pm \sqrt{-(2 + k)y + 4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) \text{ 이고}$$

준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 $\textcircled{1}$ 에서 $-(2 + k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$$\therefore D = (2 + k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$
$$2 + k = 0$$
$$\therefore k = -2$$

22. x 의 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q - 2 = 0$ 의 두 실근의 비가 1 : 2가 되도록 하는 실수 p, q 에 대하여 q 의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$
④ $q > -\frac{1}{2}$

② $q > \frac{1}{2}$
⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

③ $q \geq \frac{1}{2}$

해설

두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = 3p \quad \therefore \alpha = p$$

$$\alpha \cdot 2\alpha = 4q - 2 \quad \therefore \alpha^2 = 2q - 1$$

$$\text{따라서 } p^2 = 2q - 1$$

$$\text{한편 } D > 0 \text{에서 } 9p^2 - 4(4q - 2) > 0$$

$$9(2q - 1) - 16q + 8 > 0$$

$$2q - 1 > 0$$

$$\therefore q > \frac{1}{2}$$

23. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $\alpha + \beta = 3$
한편, $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $2x + 1 = \alpha, 2x + 1 = \beta$
즉, $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$ 이다.
$$\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{3 - 2} = \frac{1}{2}$$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 3$
 $f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ 라 하면
 $f(2x + 1) = k(2x + 1 - \alpha)(2x + 1 - \beta)$
 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$
 $\therefore \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$