1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

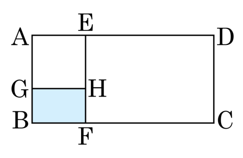
> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{\mathrm{AD}} = a$, $\overline{\mathrm{AB}} = b$일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$　　② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$　　④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square\mathrm{GBFH} = \square\mathrm{ABCD} - \square\mathrm{AGHE} - \square\mathrm{EFCD}$

$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$

$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

3. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는
$(a-b+16)x+4b-8$
$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로,
$a-b+16=3,\ 4b-8=4$
$\therefore\ a=-10,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

4. 다항식 ax^3+bx^2-4 가 x^2+x-2로 나누어 떨어지도록 a, b를 정할 때, a와 b의 곱을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2-4 &= (x^2+x-2)Q(x) \\ &= (x-1)(x+2)Q(x) \end{aligned}$$

양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면

$a+b-4=0,\ -8a+4b-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore\ ab=3$

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)(ax+2)$

우변을 전개하여 계수를 비교하면

$a=1,\ b=3\ \therefore\ ab=3$

5. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.
(준식) $= X(X+1)-6$
$= X^2+X-6$
$= (X+3)(X-2)$
$= (x^2+x+3)(x^2+x-2)$
$= (x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

6. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$　　② 0　　③ 20

④ $-2 + 4i$　　⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

7. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

ⅰ) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ⅱ) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

8. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.
$k \cdot 2^2+(2k+1)2+6=0$
$4k+4k+8=0$에서 $k=-1$
$k=-1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.
$-x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0,\ x=2,-3$
$\therefore k=-1,\ \alpha=-3$
$\therefore\ k+\alpha=-4$

9. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

10. 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 7 ④ 20 ⑤ -12

해설

$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{60}}{3}$

$\therefore \ (\alpha-\beta)^2 = |\alpha-\beta|^2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$

11. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \quad \Rightarrow \quad x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$ 이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad k+1=\pm 4$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

12. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3　　② 7　　③ 11　　④ −3　　⑤ −5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

13. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2+x+3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x-2)(x^2+x+3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

14. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.
이때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설
주어진 세 식을 변변끼리 더하면
$2(x+2y+3z)=-2$, 즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots ㉣$
㉣ − ㉡을 하면 $x=1$
㉣ − ㉢을 하면 $y=2$
㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$
$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

15. 복소수 $z=(1+i)x^2+x-(2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ ($a,\ b$는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z=(x^2+x-2)+(x^2-1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2-1=0$, $x=\pm1$
한편, $x=1$이면 $z=0+0i=0$이므로
$z\neq0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x=-1$

16. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

17. x 에 대한 다항식 $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)-4$ 를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x^2+2x+4)(x^2+2x-1)$

② $(x^2+2x+4)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

③ $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

④ $(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

해설

$x^2+2x=Y$ 라 하면,

(준식)

$=Y^2+3Y-4=(Y-1)(Y+4)$

$=(x^2+2x-1)(x^2+2x+4)$

$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

18. x에 관한 다음 이차방정식이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 또 음근의 절댓값이 양근 보다 크기 위한 m의 범위를 구하면?

$$(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$$

① $-2<m<0$　② $-3<m<0$　③ $-2<m<1$
④ $-2<m<2$　⑤ $-2<m<3$

해설

음근의 절댓값이 양근보다 크기 위한 조건은
$\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta<0$

$\alpha+\beta=\dfrac{4m}{m+3}<0$

$\therefore\ 4m(m+3)<0$

$\therefore\ -3<m<0\ \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=\dfrac{2m-1}{m+3}<0$

$\therefore\ (2m-1)(m+3)<0$

$\therefore\ -3<m<\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 동시에 만족하는 m의 범위는
$-3<m<0$

19. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots$ ㉠
이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로
$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
$(\beta - \alpha)^2 = 4$
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

20. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

21. a, b가 실수일 때, 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 이면 $a + b$의 값은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$

$\therefore\ 2+\alpha=-a\cdots$①

$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+(1+i)\alpha=-4$

$\therefore\ 2+2\alpha=-4\cdots$②

$(1+i)(1-i)\alpha=-b$

$\therefore\ 2\alpha=-b\cdots$③

①, ②, ③에서 $\alpha=-3,\ a=1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=7$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 xy는?

① 8 ② 3 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ① \\ x^2+y^2=20 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $x=y+2$ 이것을 ②식에 대입하면

$(y+2)^2+y^2=20,\ 2y^2+4y-16=0$

$(y+4)(y-2)=0$

$\begin{cases} y=2, x=4 \Rightarrow xy=8 \\ y=-4, x=-2 \Rightarrow xy=8 \end{cases}$

해설

①식을 제곱하면 $(x-y)^2=4$

$x^2+y^2-2xy=4$

$\therefore xy=\dfrac{x^2+y^2-4}{2}=\dfrac{20-4}{2}=8$

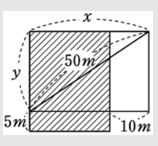
23. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

24. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$

$(m-4)(n-2)=8$

$8=1\times8=2\times4=4\times2=8\times1$이므로

$(m,n)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$

$\therefore$ 4쌍의 $(m,\ n)$이 존재한다.

25. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이 허근 α를 갖고, α^3이 실수일 때, m의 값은?

① 0 ② 1 ③ 3

④ 0, 3 ⑤ 0, 1, 3

해설

α^3이 실수이므로 $\overline{\alpha}^3=\alpha^3$,
$(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2)=0$
α는 허수이므로 $\alpha\neq\overline{\alpha}$
$\therefore\ \alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2=0$ ……(ⅰ)
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\overline{\alpha}=m-1,\ \alpha\overline{\alpha}=m+1$
(ⅰ)은 $(\alpha+\overline{\alpha})^2-\alpha\overline{\alpha}=0$, $(m-1)^2-(m+1)=0$
$m^2-3m=m(m-3)=0$
$\therefore\ m=0,\ 3$
이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이
허근을 가지므로 $D=(m-1)^2-4(m+1)<0$
$m=0,\ 3$은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.