1. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

① 9 개　② 11 개　③ 13 개　④ 15 개　⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개) 이다.

2. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64}$

$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$

3. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2-2\sqrt{b}x+(2a+1)=0$ ⋯㉠
$x^2-2ax-b=0$ ⋯㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.
② 중근을 가진다.
③ 서로 다른 두 허근을 가진다.
④ 판별할 수 없다.
⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설
㉠의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=b-(2a+1)>0$ ∴ $b>2a+1$
㉡의 판별식을 D' 이라 하면
$\frac{D'}{4}=a^2+b>a^2+2a+1$
$=(a+1)^2 \geq 0$
∴ $\frac{D'}{4}>0$
따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

4. 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 실수 k 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, 3α라 하면

$2\alpha+3\alpha=5\alpha=k-1$ ······㉠

$(2\alpha)(3\alpha)=6\alpha^2=k$ ······㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{k-1}{5}$,

이것을 ㉡에 대입하면 $6k^2-37k+6=0$

$\therefore\ k=6,\ \dfrac{1}{6}$

5. 두 집합 $A,\ B$ 가 $A \subset B,\ B \subset A$ 일 때, 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라. (단, $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing$)

보기

㉠ $A \cup B = A$

㉡ $A \cap B = A$

㉢ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

㉣ $n(A) = n(A \cap B)$

㉤ $n(A - B) = n(B - A)$

㉥ $n(A) - n(B) = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$A \subset B,\ B \subset A$ 이므로 $A = B$

㉢ $n(A \cup B) = n(A) = n(B)$

㉤ $n(A - B) = n(B - A) = 0$

6. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 $\{A,\ B\} = A^2 + B^2 - AB$라 할 때, $\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$　② $x - 1$　③ x

④ $x + 1$　⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$
$= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7$
$= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7$
$= 3x^4 - 9x^2 + 6$
$= 3(x^4 - 3x^2 + 2)$
$= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2)$
$= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

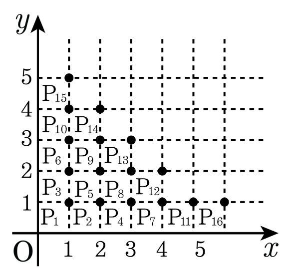
7. 실수 $x,\ y$에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$일 때, xy의 값은?

① -6　　② -3　　③ 0　　④ 3　　⑤ 6

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 을
x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \ \cdots$ ㉠
이 때, x 는 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.
$D = (y+1)^2 - 2\left(y^2 - 2y + 5\right) \geq 0$
$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \ \ (y-3)^2 \leq 0$
$\therefore y = 3$
$y = 3$을 ㉠에 대입하면
$2x^2 + 8x + 8 = 0,\ x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x+2)^2 = 0$
$\therefore\ x = -2 \ \therefore\ xy = (-2) \cdot 3 = -6$

8. 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 점$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(2,\ 1)$, $\mathrm{P}_3(1,\ 2)$, $\mathrm{P}_4(3,\ 1)$, $\mathrm{P}_5(2,\ 2), \cdots$ 에 대하여 원점과 점 P_{100} 사이의 거리는?



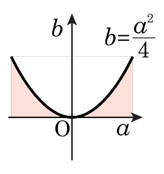
① 10 ② $2\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{11}$ ⑤ $3\sqrt{13}$

해설

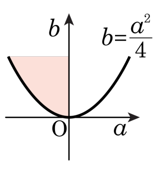
x좌표와 y좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
$\{(1,\ 1)\}$, $\{(1,\ 1), (1,\ 2)\}$,
$\{(3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3)\}, \cdots$
제n군까지의 항수를 구해 보면
$1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 이므로
$\dfrac{13 \times 14}{2} = 91$ 에서 제 100항은 제 14군의 9번째 항이다.
이 때, 제 14군은 x, y좌표의 합이 15이므로 $P_{100} = (6,\ 9)$
따라서 원점과 $P_{100} = (6,\ 9)$ 사이의 거리는
$\sqrt{6^2+9^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 서로 다른 양수일 때, 좌표평면에서 점 (a,b) 가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 제외)

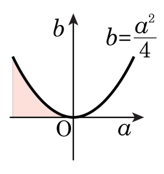
①



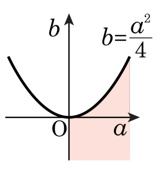
②



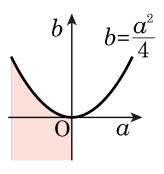
③



④



⑤



해설

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의
서로 다른 두 실근을 α,β 라 하면
주어진 조건에 의하여
$D=a^2-4b>0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0 \cdots$ ㉠
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a>0, \alpha\beta=b>0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a<0, b>0, b<\frac{1}{4}a^2$
따라서 구하는 영역은 ㉢ 과 같다.

10. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases}$$ 로 정의한다.

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
$\therefore f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \cdots = f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$