

1. 집합 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

① 9 개

② 11 개

③ 13 개

④ 15 개

⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개)이다.

2. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64} \\ &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12\end{aligned}$$

3.

 x 에 대한 두 이차방정식

$$x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a + 1) = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 - 2ax - b = 0 \cdots \textcircled{㉡}$ 가 있다. $\textcircled{㉠}$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, $\textcircled{㉡}$ 의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

$\textcircled{㉠}$ 서로 다른 두 실근을 가진다.

$\textcircled{㉡}$ 중근을 가진다.

$\textcircled{㉢}$ 서로 다른 두 허근을 가진다.

$\textcircled{㉣}$ 판별할 수 없다.

$\textcircled{㉤}$ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

$\textcircled{㉠}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b - (2a + 1) > 0 \therefore b > 2a + 1$$

$\textcircled{㉡}$ 의 판별식을 D' 이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D'}{4} &= a^2 + b > a^2 + 2a + 1 \\ &= (a + 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{D'}{4} > 0$$

따라서, $\textcircled{㉡}$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

4. 이차방정식 $x^2 - (k-1)x + k = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3일 때, 실수 k 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근의 비가 2 : 3이므로 두 근을 2α , 3α 라 하면

$$2\alpha + 3\alpha = 5\alpha = k - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2\alpha)(3\alpha) = 6\alpha^2 = k \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \alpha = \frac{k-1}{5},$$

이것을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $6k^2 - 37k + 6 = 0$

$$\therefore k = 6, \frac{1}{6}$$

5. 두 집합 A, B 가 $A \subset B, B \subset A$ 일 때, 다음 보기 중 옳지 않은 것을 골라라. (단, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$)

보기

㉠ $A \cup B = A$

㉡ $A \cap B = A$

㉢ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

㉣ $n(A) = n(A \cap B)$

㉤ $n(A - B) = n(B - A)$

㉥ $n(A) - n(B) = 0$

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

해설

$A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$

㉢ $n(A \cup B) = n(A) = n(B)$

㉤ $n(A - B) = n(B - A) = 0$

6. 두 다항식 A, B 에 대하여 $\{A, B\} = A^2 + B^2 - AB$ 라 할 때, $\{x^2 + 1, 2x^2 - 3\} - 7$ 을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$

② $x - 1$

③ x

④ $x + 1$

⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \{x^2 + 1, 2x^2 - 3\} - 7 \\ &= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7 \\ &= 3x^4 - 9x^2 + 6 \\ &= 3(x^4 - 3x^2 + 2) \\ &= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2) \\ &= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

7. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 일 때, xy 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0 \text{ 을}$$

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이 때, x 는 실수이므로 $\textcircled{7}$ 은 실근을 가져야 한다.

$$D = (y+1)^2 - 2(y^2 - 2y + 5) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad (y-3)^2 \leq 0$$

$$\therefore y = 3$$

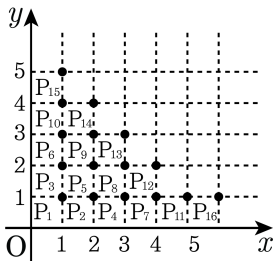
$y = 3$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$2x^2 + 8x + 8 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \quad \therefore xy = (-2) \cdot 3 = -6$$

8. 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 점 $P_1(1, 1)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(1, 2)$, $P_4(3, 1)$, $P_5(2, 2)$, $\dots$ 에 대하여 원점과 점 P_{100} 사이의 거리는?



① 10

② $2\sqrt{11}$

③ $2\sqrt{13}$

④ $3\sqrt{11}$

⑤ $3\sqrt{13}$

해설

x 좌표와 y 좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면

$$\{(1, 1)\}, \{(1, 1), (1, 2)\},$$

$$\{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\}, \dots$$

제 n 군까지의 항수를 구해 보면

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{13 \times 14}{2} = 91 \text{ 에서 제 100 항은 제 14 군의 9 번째 항이다.}$$

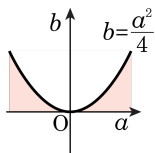
이 때, 제 14 군은 x, y 좌표의 합이 15 이므로 $P_{100} = (6, 9)$

따라서 원점과 $P_{100} = (6, 9)$ 사이의 거리는

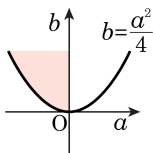
$$\sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 서로 다른 양수일 때, 좌표평면에서 점 (a, b) 가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 제외)

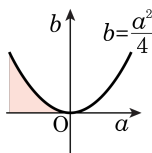
①



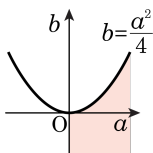
②



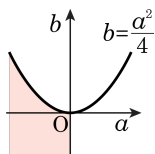
③



④



⑤



해설

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의
서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면
주어진 조건에 의하여

$$D = a^2 - 4b > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a > 0, \alpha\beta = b > 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여 } a < 0, b > 0, b < \frac{1}{4}a^2$$

따라서 구하는 영역은 ㉢과 같다.

10. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x=1) \end{cases} \quad \text{로 정의한다.}$$

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.

(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$))

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,

1은 4로 대응시킴을 의미한다.

다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면

4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.

$$\therefore f^4(x) = x$$

$$\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \dots = f^4(x) = x$$

$$\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$$

