1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A\triangle B = 2A + B$, $A\blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A\blacktriangledown(B\triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$A\blacktriangledown(B\triangle A) = A\blacktriangledown(2B + A)$$
$$= A - 3(2B + A) = -2A - 6B$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

3. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$　② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R

③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$　④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R

⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

4. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$가 $x^2 - x + 1$로 나누어떨어질 때, $a - b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x^3 + ax^2 + x + b$
$= (x^2 - x + 1)(2x + c)$
$= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c$
$\therefore\ a = c - 2,\ 1 = 2 - c,\ b = c$
$c = 1$이므로 $a = -1, b = 1$
$\therefore\ a - b = -2$

5. 다항식 $f(x)$를 $x-2,\ x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 $3, 7$이라고 할 때, $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$ ② $3x-4$ ③ $4x-5$

④ $5x+6$ ⑤ $6x-7$

해설

$f(x) = (x-2)\,Q_1(x) + 3,\ f(2) = 3$
$f(x) = (x-3)\,Q_2(x) + 7,\ f(3) = 7$
$f(x) = (x-2)(x-3)\,Q_3(x) + ax + b$
$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 7$ 이다.
연립하면 $a = 4,\ b = -5$
$\therefore$ 나머지는 $4x-5$

6. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$
$Q(2) = -2$
$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.
$f(2) = (2-3)Q(2) + 1$
$= -1 \times (-2) + 1 = 3$

7. $x^4 - 3x^2 + 1$을 인수분해 하면?

① $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

③ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

⑤ $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

8. $x^4-15x^2+10x+24=(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① -5 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

± 상수항의 약수 중에서 $x=-1,2$을 대입하면 식의 값이 0 이므로

주어진 식은 $x+1, x-2$을 인수로 갖는다.

조립제법으로 나누어 보면,

-1	1	0	-15	10	24
		-1	1	14	-24
2	1	-1	-14	24	0
		2	2	-24	
3	1	1	-12	0	
		3	12		
-4	1	4	0		
		-4			
	1	0			

$x^4-15x^2+10x+24$

$=(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$

$\therefore\ a+b+c+d=1+(-2)+(-3)+4=0$

9. $x+y+z=1,\ xy+yz+zx=2,\ xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x+y+z=1$을 변형하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (1-z)(1-x)(1-y)\\ &= 1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz\\ &= 1-1+2-3=-1\end{aligned}$$

10. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$(\text{준식}) = (a^2+3a+2)+(a^2+2a)\,i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2+3a+2=0$
$a^2+2a \neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

11. $A = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1 + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$ ② 1 ③ 0 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$$A = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^{2005}$$

$$= 1 + \{(-i) + (-1) + i + 1\} + \cdots + (-i)$$

$$= 1 - i$$

12. $x = \dfrac{3+i}{2}$ 일 때, $p = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ 의 값을 구하면?

① $2+i$　② $2-i$　③ $-2+i$

④ $-4+i$　⑤ $4+i$

해설

$x = \dfrac{3+i}{2}$ 에서 $2x - 3 = i$

$(2x-3)^2 = i^2$ 에서 $2x^2 - 6x + 5 = 0$

나눗셈 실행하여 몫과 나머지를 구하면

$2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$

$= (2x^2 - 6x + 5)(x+2) + 2x - 7$

$= 2x - 7$

$= 2\left(\dfrac{3+i}{2}\right) - 7$

$= -4 + i$

13. $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$ 일 때, $|a-1|+|a|+|a+1|$ 을 간단히 하면?

① $-a+2$ ② $-a$ ③ 2

④ a ⑤ $a-2$

해설

$a+1 \geq 0,\ a<0 \Rightarrow -1 \leq a < 0$

$\therefore$ (준식) $= -(a-1)-(a)+(a+1)$

$= -a+2$

14. x에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$일 때, $x=2$　　② $a\neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$일 때, 불능　　④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$

ⅰ) $a=2$ 일 때 : 부정

ⅱ) $a\neq 2$ 일 때 : $x=a$

15. 이차방정식 $x^2 - 4|x| - 5 = 0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

i) $x \geq 0$일 때,
$x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0$
$\therefore x = 5$
ii) $x < 0$일 때,
$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0$
$\therefore x = -5$
i), ii)에서 두 근의 곱은 -25이다.

16. 이차방정식 $x^2+2(k-m)x+(k^2-n+4)=0$이 실수 k값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 $m+n$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.
$D'=(k-m)^2-(k^2-n+4)=0$
모든 k에 대해 성립하려면
$-2m=0$, 그리고 $m^2+n-4=0$
$\therefore m=0,\quad n=4,\quad m+n=4$

17. 이차방정식 $x^2 - x + 5 = 0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha + 1$과 $\beta + 1$을 두근으로 하는 이차방정식을 구하면? (단, 최고차항의 계수는 1이다.)

① $x^2 + 3x - 7 = 0$　② $x^2 - 3x - 7 = 0$

③ $x^2 + 7x - 3 = 0$　④ $x^2 - 7x + 3 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 7 = 0$

해설

$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = 5$

두근의 합 : $(\alpha + 1) + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 2 = 3$

두근의 곱 : $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1$

$= 5 + 1 + 1 = 7$

$\therefore\ x^2 - 3x + 7 = 0$

18. $x^2+ax+(a^2+2a-3)=0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a의 범위를 구하면?

① $0<a<1$ ② $\frac{1}{2}<a<2$ ③ $1\le a<2$
④ $2<a\le 3$ ⑤ $-\frac{1}{2}<a<2$

해설

두 근을 α, β라 하면
|음근| > 양근이므로
$\alpha+\beta=-a<0$, $\alpha\beta=a^2+2a-3<0$
$\therefore\ 0<a<1$

19. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$
이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

20. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$의 그래프와 직선 $y = ax + b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3 + a)x + 1 - b = 0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1 + 5 = \dfrac{3 + a}{2}$, $1 \times 5 = \dfrac{1 - b}{2}$

$\therefore a = 9,\ b = -9$

$\therefore ab = -81$

21. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ −9 ⑤ −18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
$t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3$.
t의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때, } y = -3 \\ t = 5\text{일때, } y = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

22. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

2	1	−1	1	−6
		2	2	6
	1	1	3	0

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2 , x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

23. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$
$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

24. 부등식 $(a+b)x+(2a-b)>0$의 해가 $x<-1$일 때, 부등식 $ax+b>0$의 해를 구하면?

① $x<-\frac{1}{2}$ ② $x<-\frac{1}{3}$ ③ $x>-\frac{1}{2}$
④ $x>-\frac{1}{3}$ ⑤ $x>-1$

해설

$(a+b)x+(2a-b)>0$의 해가 $x<-1$이려면
$a+b<0$ ····· ㉠
$-\frac{2a-b}{a+b}=-1$ ····· ㉡
㉡에서 $a=2b$이고 $a+b=2b+b=3b<0$
$\therefore\ b<0$
$ax+b>0$에서 $2bx+b>0,\ 2bx>-b$
$b<0$이므로 $x<-\frac{1}{2}$

25. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$

② $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x \le 3$

③ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

④ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$

⑤ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

해설

$\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $(x-3)(x+2) \le 0$

$-2 \le x \le 3$

㉡ $(2x-3)(2x-1) \ge 0$

$x \ge \frac{3}{2}, \quad x \le \frac{1}{2}$

㉠과 ㉡의 공통범위 :

$-2 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \le x \le 3$