1. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

2. 이차함수 $y = -x^2 + 4|x| - 3$ 이 최댓값을 갖도록 하는 실수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 0 개 ⑤ 무수히많다.

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때,

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$y = -x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1$$

이상에서 $x = -2,\ 2$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 구하는 실수 x 의 개수는 2 개이다.

3. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \ (0 \le x \le 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 -4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x-m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$

$x = 4$ 에서 최댓값 5 , $x = 1$ 에서 최솟값 -4

4. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$

이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로

$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.

따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$

$\therefore a = -2$

5. x의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$y = 2x^2 - 8kx = 2(x-2k)^2 - 8k^2$ 이

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2k, \ -8k^2)$ 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하므로 주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $-8k^2 = 10$, $k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10$, $24k = 8$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

6. x의 값의 범위가 $2 \le x \le 4$ 인 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3$ 이므로
$2 \le x \le 4$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값1,
$x = 4$ 일 때 최솟값 -15를 가진다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-15) = -14$

7. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \ (0 \le x \le 3)$$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

8. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,

$t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3$.

t 의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때, } y = -3 \\ t = 5\text{일때, } y = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

9. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t-3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

10. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값과 $f(f(x))$ 의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \le 0$ ② $a \ge 0$ ③ $a \le 1$ ④ $a \ge 1$ ⑤ $a \le 2$

해설

$f(x) = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$ 은
$x = -1$ 일 때 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.
$\therefore f(x) \ge a - 1$
$f(x) = t$ 라면
$f(f(x)) = f(t) = t^2 + 2t + a (t \ge a - 1)$
이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이
$t \ge a - 1$ 에 포함되면
$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1) = a - 1$ 이 되어 최솟값과 같아진다.
즉, $-1 \ge a - 1$ $\therefore a \le 0$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$의 두 실근을 α,β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$이
두 실근을 가져야 하므로
$D=(a-2)^2-4(a^2+a+2)=-3a^2-8a-4\geq 0$
$(3a+2)(a+2)\leq 0$
$\therefore -2\leq a\leq -\frac{2}{3}\cdots$ ㉠
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-a+2,\ \alpha\beta=a^2+a+2$이므로
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=a^2+a+2+a-2+1$
$=a^2+2a+1=(a+1)^2$
따라서, $-2\leq a\leq -\frac{2}{3}$에서
$a=-1$일 때 최솟값 0,
$a=-2$일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

12. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8$
$x,\ y$는 실수이므로 $(x-1)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

13. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

14. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$

$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\leq 0$

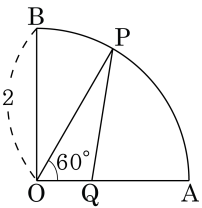
$\rightarrow\ y^2+4y-5\leq 0$

$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\leq 0$

$\therefore\ -5\leq y\leq 1$

$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

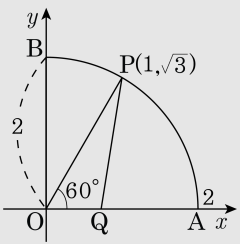
15. 반지름의 길이가 2 인 사분원 OAB 의 호 AB 위에 $\angle AOP = 60°$ 가 되도록 점 P 를 정한다. 이 때, 선분 OA 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 의 최솟값은?



① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{15}{4}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

아래 그림과 같이 좌표평면을 도입하여 생각해 보면



$A(2,0), B(0,2), P(1, \sqrt{3})$ 이 된다.

이 때, $Q(x, 0)$ 로 놓으면 $(0 < x < 2)$

$\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = x^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 2x + 4 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

따라서, $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 은

최솟값 $\frac{7}{2}$ 을 갖는다.