

1. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10

② -8

③ -6

④ -4

⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1, 5)$ 를 대입하면 $a = 2$

따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면

$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2, b = 4, c = -1$

$\therefore abc = -8$

2. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$y = ax^2 + bx - 3 = a(x - 2)^2 + 5$$

$$= ax^2 - 4ax + 4a + 5 \text{ 이므로}$$

$$b = -4a, \quad -3 = 4a + 5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 8$

$$\therefore a + b = 6$$

3. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ ($-2 \leq x \leq 2$)의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = -x^2 - 2x + 5 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 5 = -(x + 1)^2 + 6$$

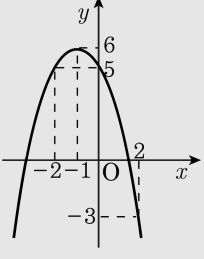
점 $(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.

$$f(-2) = 5, f(2) = -3$$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$$\therefore M + m = 6 - 3 = 3$$

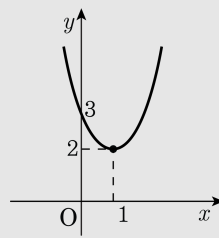


4. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x 의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의
함숫값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과
같다.
 $f(0) = 3, f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위는 $2 < y < 3$



5. 이차함수 $y = x^2 + kx + k$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 범위는?

- ① $k < 1$ 또는 $k > 5$ ② $1 < k < 5$
③ $1 \leq k \leq 5$ ④ $k < -5$ 또는 $k > -1$
⑤ $1 < k < 3$

해설

이차방정식 $x^2 + kx + k = x + 1$, 즉 $x^2 + (k-1)x + k-1 = 0$
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
 $D = (k-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k-1) > 0$
 $k^2 - 6k + 5 > 0, (k-1)(k-5) > 0$
 $\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

6. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$ 과 접할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가

직선 $y = mx + n$ 과 접하므로

$$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = mx + n$$

$$\text{즉, } x^2 - (2a + m)x + a^2 + 2a - n - 1 = 0$$

$$\therefore 4am + m^2 - 8a + 4n + 4 = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 성립하므로

$$(4m - 8)a + (m^2 + 4n + 4) = 0$$

$$4m - 8 = 0, \quad m^2 + 4n + 4 = 0 \text{에서}$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = 2, n = -2$

$$\therefore m + n = 0$$

7. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a , b 의 값을 구하면?

① $a = -1$, $b = -1$

② $a = -1$, $b = 0$

③ $a = 1$, $b = 0$

④ $a = 1$, $b = -1$

⑤ $a = 0$, $b = 1$

해설

$$y = ax^2 + bx + 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$y = -x + 6 \quad \cdots \textcircled{3}$$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로

②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.

②, ③을 연립하여 풀면

교점은 (2, 4), (-1, 7) 이고,

이 두 점을 곡선 ①이 지나므로

$$4a + 2b + 8 = 4, \quad a - b + 8 = 7$$

$$\therefore a = -1, \quad b = 0$$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = -9 + 2a^2$
 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$
그런데 $\frac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$
 $\therefore -3 \leq a \leq 3$
 $\therefore 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$
즉, $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$
 $\therefore (\text{최댓값}) + (\text{최솟값}) = 0 + 6 = 6$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.
 $\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$
따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0을 가진다.

10. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a 는 상수)

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 이
두 실근을 가져야 하므로
 $D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) = -3a^2 - 8a - 4 \geq 0$
 $(3a+2)(a+2) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3} \cdots \text{㉠}$
근과 계수의 관계에서
 $\alpha + \beta = -a + 2, \alpha\beta = a^2 + a + 2$ 이므로
 $(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$
 $= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1$
 $= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$
따라서, $-2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ 에서
 $a = -1$ 일 때 최솟값 0,
 $a = -2$ 일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

11. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$
 $= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6$
 $= 2(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3$
 x, y 는 실수이므로 $(x - 2)^2 \geq 0, (y + 1)^2 \geq 0$
 $\therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3$
따라서, $x = 2, y = -1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

12. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 실수 k 의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k+a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + a^2 - 4k) = 2ak + 4k = (2a+4)k \text{ 이고}$$

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

$$2a + 4 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

13. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

A(α , 0), B(β , 0) ($\alpha < \beta$) 이라 하면
 α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 2a \quad \cdots \textcircled{1}$
이 때, $\overline{AB} = 2$ 이므로
 $\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
 $(\beta - \alpha)^2 = 4$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

14. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하여라.

- ① $m < -2, \ m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, \ m > \frac{2}{3}$
- ③ $m < -2, \ m > 2$

④ $m < 2, \ m > \frac{2}{3}$
- ⑤ $m < -5, \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을 항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.

$x^2 + (m - 2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식

$$D = (m - 2)^2 - 4m^2 < 0,$$

$$(m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$$

$$(3m - 2)(m + 2) > 0$$

$$\therefore m < -2, \ m > \frac{2}{3}$$

15. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x + k = x^2$,
즉 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -k$
두 그래프의 교점의 좌표를
 $(\alpha, 2\alpha + k), (\beta, 2\beta + k)$ 라 하면
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로
 $\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2} = 2\sqrt{10}$ 에서
 $\sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$
 $\therefore |\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서
 $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4(-k), 8 = 4 + 4k$
 $\therefore k = 1$

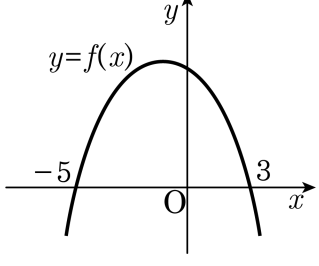
16. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

- ① 최댓값 1, 최솟값 -3 ② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1 ④ 최댓값 -1 , 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x 에 관해 내림차순으로 정리하면
 $4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$
실수의 해를 가지므로
 $\frac{D}{4} = (-8)^2 - 4(y^2 + 2y + 13) \geq 0$
 $\therefore y^2 + 2y - 3 \leq 0$
 $\therefore (y + 3)(y - 1) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq y \leq 1$
따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

17. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?

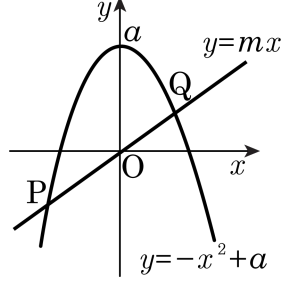


- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ ($a < 0$) 으로 놓으면
 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$
 $= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$ 이므로
 $\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서
 $x = -6$ 또는 $x = 10$
 따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

18. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 일 때, $a + m$ 의 값을 구하여라. (단, a, m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m = (\sqrt{5} - 1) + (-\sqrt{5} - 1) = -2$$

$$-a = (\sqrt{5} - 1)(-\sqrt{5} - 1) = -4$$

$$\therefore a = 4, m = 2 \quad \therefore a + m = 6$$