1. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$

무리수의 상등에 의하여

유리수 부분 : $(a^2+2) = 6$, $a^2 = 4$

무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, $2a = b$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4,\ ab = 8 \\ a = -2, b = -4,\ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore ab = 8$

2. 유리함수 $f(x) = \dfrac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ -1 ⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x = \dfrac{ay}{3y+2}$

$3xy + 2x = ay$

$\therefore y = \dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{-2x}{3x-a}$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로

$\dfrac{ax}{3x+2} = \dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore a = -2$

3. $y=\sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha=3$, $\beta=5$
$\therefore\ \alpha+\beta=8$

4. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가
$f(x) = \sqrt{x-2}+2,\ g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

5. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
$k = 5$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 30$, $n(A \cup B) = 56$, $n(A \cap B) = 12$ 일 때, $n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 38

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$56 = 30 + n(B) - 12$
$n(B) = 38$

7. $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=5$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=1-\frac{x-1}{x-1-x}$$

$$=1+x-1=x$$

$\therefore x=5$

8. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$을 만족시키는 실수 a, b, c에 대하여 다음 식의 값은?

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=0,\ ab+bc+ca=0$

$(\because abc\neq 0)$

$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$

9. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$2p+7$, p^2, $2p+9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p+16$, $p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

따라서 $p=-2$ 또는 $p=4$

이때, p는 양수이므로 $p=4$

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 공차가 각각 $2, 3$인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$의 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$
$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 3$
$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1) \cdot 5$
$\therefore$ 공차 $= 5$

11. 수열 $\log\frac{1000}{3},\ \log\frac{1000}{9},\ \log\frac{1000}{27},\ \log\frac{1000}{81},\cdots$ 에서 첫째항부터 몇째 항까지의 합이 최대가 되는가? (단, $\log 3 = 0.4771$)

① 제 5항　　② 제 6항　　③ 제 7항

④ 제 8항　　⑤ 제 9항

해설

$$\log\frac{1000}{3} = \log 10^3 - \log 3$$
$$= 3 - \log 3$$

$$\log\frac{1000}{9} = 3 - 2\log 3$$

$$\log\frac{1000}{27} = 3 - 3\log 3$$

이므로 주어진 수열은

$a = 3 - \log 3$

$d = -\log 3$ 인 등차수열

$a_n = (3 - \log 3) + (n-1)\cdot(-\log 3)$

$= 3 - n \cdot \log 3$

그런데 $\log 3 = 0.4771$ 이므로

$a_6 = 3 - 6\log 3 = 0.1374$

$a_7 = 3 - 7\log^3 = -0.3397$

$\therefore$ 6번째 항까지의 합이 최대

12. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36 ② 45 ③ 54 ④ 63 ⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r,\ 9r^2,\ 9r^3$으로 놓을 수 있다.
이때, $9r^4 = 144$이므로 $r^4 = 16$
$r^4 - 16 = 0,\ (r^2+4)(r^2+2)(r^2-2) = 0$
그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$
따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

13. 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$S_n = \dfrac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000$, $4^n > 3001$

$2n \log 2 > \log 3001$

$n > \dfrac{\log 3001}{2\log 2} > \dfrac{\log 3000}{2\log 2}$

$= \dfrac{\log 3 + \log 1000}{2\log 2} = \dfrac{3.4771}{0.6020} = 5.7\times\times\times$

14. $a > 0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^{m}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^{m} \cdot (\sqrt[m]{a})^{n} = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$(\sqrt[n]{a})^{m} \cdot (\sqrt[m]{a})^{n} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$

15. a, x, y가 양의 실수이고 $A = \log_a x^2 - \log_a y^3$, $B = \log_a y^2 - \log_a x^3$ 일 때, 다음 중 $2A + 3B$와 같은 것은?(단, $a \neq 1$)

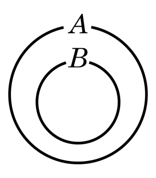
① $\log_a \frac{1}{x^5}$ ② $\log_a \frac{1}{y^5}$ ③ $\log_a \frac{1}{xy}$
④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$ ⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$A = \log_a x^2 - \log_a y^3 = 2\log_a x - 3\log_a y$
$B = \log_a y^2 - \log_a x^3 = 2\log_a y - 3\log_a x$

$$\begin{aligned} \therefore 2A + 3B &= 2(2\log_a x - 3\log_a y) + 3(2\log_a x - 3\log_a x) \\ &= -5\log_a x = \log_a x^{-5} = \log_a \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

16. 두 집합 A, B 사이의 관계가 다음 벤 다이어그램과 같고, 집합 $A = \{x \mid x$는 2의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 $\boxed{}$ 의 배수$\}$ 일 때, $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 고르면?



① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12, \cdots\}$

$\{4,\ 8,\ 12, \cdots\} \subset A$

$\{8,\ 16,\ 24, \cdots\} \subset A$

$\{10,\ 20,\ 30, \cdots\} \subset A$

따라서 ①, ③이다.

17. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

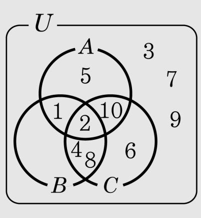
'적어도~' 문제는 반대의 경우를 구하여 전체 경우의 수에서 빼준다.
모든 부분집합의 수 : 2^5 개 홀수만 가지고 만들 수 있는 부분집합 수⇒ $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합 수 : 2^3 개
$\therefore 32 - 8 = 24$(개)

18. $U = \{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여
$A = \{x \mid x\text{는 } 10\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } 8\text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x\text{는 } 2\text{의 배수}\}$ 일 때, $(A-B)^c$ 의 원소의 합은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

$A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $C = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로
벤 다이어그램으로 나타내면



가 되어

$(A-B)^c = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 이다. 따라서 원소의 합은 40 이다.

19. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 41 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 4,\ n(B^c) = 7,\ n(A^c \cap B^c) = 4$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

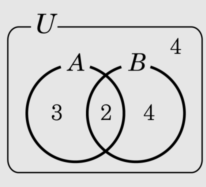
$n(U) = 13$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 6$

$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 4$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 4$



벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면　따라서

$n(A - B) = 13 - (6 + 4) = 3$ 이다.

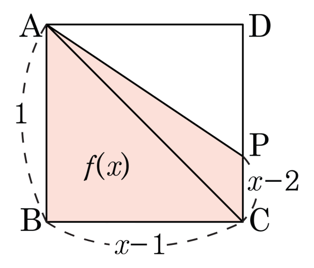
20. 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1)=3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

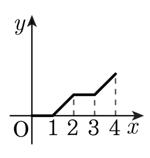
① -3　② $-\frac{1}{3}$　③ 0　④ $\frac{1}{3}$　⑤ 3

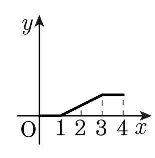
해설

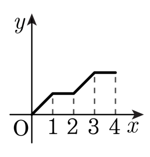
$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=0$이다.
$x=1, y=-1$을 대입하면
$f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)=0$
$f(-1)=-f(1),\ f(1)=3$이므로
$\therefore\ f(-1)=-3$

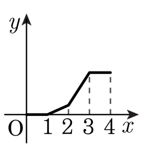
21. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

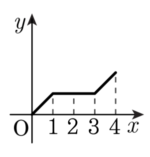


①


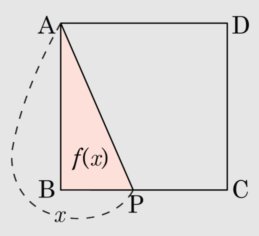
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

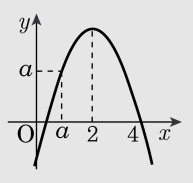
함수는 연속이므로 ②가 옳다.

22. 집합 $X = \{x \mid x \le a,\ x\text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \le 2$, $f(a) = a$

$-a^2 + 4a = a$ 　　$\therefore\ a = 0,\ 3$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0

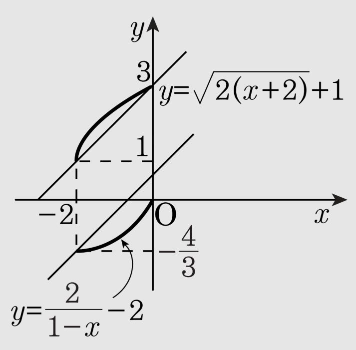
23. 정의역이 $\{x|-2 \le x \le 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \le x \le 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

24. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$이 참임을 증명한다.
k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=2,\ \ b=2$
$\therefore a+b=4$

25. 다음 중 값이 다른 것은?

① $(\sqrt{2})^{\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}$　　② $\left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$　　④ $\left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$

해설

$\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}} =$
$\left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}$

① $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$

② $\left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\frac{\sqrt{2}}{4}})^{\sqrt{2}}$
$= 2^{\frac{1}{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

④ $\left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

26. 집합 $A = \{a, d, e\}$ 이고 집합 $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, $A \cap X = \{a, e\}$, $c \notin X$, $X \cup B = B$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 4 개

해설

집합 B의 부분집합 중 원소 a, e는 포함하고, 원소 c, d는 포함하지 않는 부분집합의 수를 구한다.
$2^{6-2-2} = 2^2 = 4$ (개)

27. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음의 조건을 모두 만족할 때, $n(A)$ 와 $n(B)$ 의 차를 구하여라.

(가) $n(U)=20,\ n(A)\cdot n(B)=60$ (나) $2\cdot n(A\cap B)=n(A^c\cap B^c)$ (다) $n(A\cup B)=3\cdot n(A\cap B)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$n(A\cap B)=k$라 하면

$2k=n(A^c\cap B^c)=n(U)-n(A\cup B)=20-n(A\cup B)$

$n(A\cup B)=3k$에서 $2k=20-3k$

$\therefore\ k=4,\ n(A\cup B)=12$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$12=n(A)+n(B)-4$

$\therefore\ n(A)+n(B)=16$

$n(A)\cdot n(B)=60$이므로 더해서 16, 곱해서 60이 되는 두 수를 구하면 6 과 10 이다.

따라서 $n(A)$와 $n(B)$의 차는 $10-6=4$

28. $a+b+c=abc=3\sqrt{3}$ 인 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^4+b^4+c^4$ 의 최솟값은?

① 9　　② $9\sqrt{3}$　　③ $12\sqrt{3}$　　④ 27　　⑤ 81

해설

A, B, C 가 실수이면
$A^2+B^2+C^2 \geq AB+BC+CA$ 가 성립한다.
$\therefore a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)$
$=abc(a+b+c)$
$\therefore a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$
$=(3\sqrt{3})^2=27$
등호는 $a^2=b^2=c^2,\ ab=bc=ca$ 일 때,
즉 $a=c$ 일 때 성립. 따라서 최솟값은 27

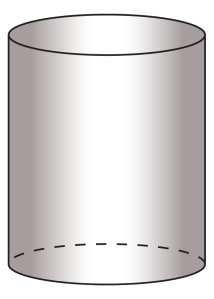
29. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a = b = c$일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$　② $2^3\sqrt{3}$　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}$$
$$= 3\sqrt[3]{8} = 6$$

30. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를
x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S 라 하면
$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$
$= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$
$= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$
단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,
곧 $x = 2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

31. 자연수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\begin{cases} x+1 \ (x\text{는 홀수}) \\ \dfrac{x}{2}(x\text{는 짝수}) \end{cases}$ 로 정의할 때, $f(f(x))=2$ 를 만족시키는 x의 값들의 합은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$f(f(x))=2$ 에서 $f(x)=a$로 놓으면 $f(a)=2$

i) a가 홀수일 때 $f(a)=a+1=2$

$\therefore a=1$

ii) a가 짝수일 때 $f(a)=\dfrac{a}{2}=2 \ \therefore a=4$

i), ii) 에서 $f(x)=1$ or $f(x)=4$

iii) $f(x)=1$ 일 때 x가 홀수이면 존재하지 않고

x가 짝수이면 $x=2$

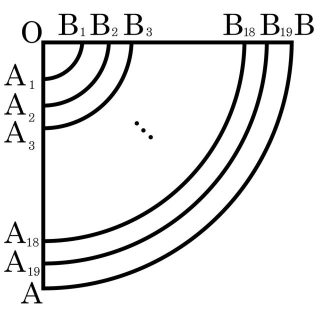
iv) $f(x)=4$ 일 때 x가 홀수이면 $x=3$

x 가 짝수이면 $x=8$

$\therefore f(f(x))=2$ 를 만족하는 x 값은 $x=2,\ 3,\ 8$

$\therefore 2+3+8=13$

32. 다음 그림과 같이 사분원 OAB에 대하여 두 선분 OA, OB를 각각 20등분하여 19개의 호를 새로 만들었다. 사분원 OAB의 넓이가 π일 때, 20개의 호의 길이의 총합이 $\frac{m}{n}\pi$이라 할 때, $m+n$의 값은?(단, m, n은 서로소인 정수)



① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

해설

사분원 OAB의 반지름의 길이를 r이라 하면 사분원의 넓이는 $\frac{1}{4}\pi r^2 = \pi$이므로 $r = 2$이다.

이 때, 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \pi$, 5.0pt24.88pt$\overset{\frown}{\mathrm{A_1B_1}} = \frac{\pi}{20}$이고, 20개의 호 5.0pt24.88pt$\overset{\frown}{\mathrm{A_1B_1}}$, 5.0pt24.88pt$\overset{\frown}{\mathrm{A_2B_2}}, \cdots,$ 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$의 길이는 등차수열을 이루므로 구하는 호의 길이의 총합은

$$\frac{20\left(\frac{\pi}{20}+\pi\right)}{2} = \frac{21}{2}\pi$$

따라서, $m = 21$, $n = 2$ $\therefore$ $m+n = 23$

33. 자연수 n에 대하여 $\sqrt[4]{n}$의 정수 부분을 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$의 값이 200 이상이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 99　　② 100　　③ 108　　④ 109　　⑤ 110

해설

(i) $1 \le n < 16$일 때,

$1^4 \le n < 2^4$이므로 $1 \le \sqrt[4]{n} < 2$

$\therefore f(n) = 1$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15) = 15$

(ii) $16 \le n < 81$일 때,

$2^4 \le n < 3^4$이므로 $2 \le \sqrt[4]{n} < 3$

$\therefore f(n) = 2$

$\therefore f(16)+f(17)+f(18)+\cdots+f(80)$

$= 2 \times 65 = 130$

(iii) $3^4 \le n < 4^4$일 때,

$3 \le \sqrt[4]{n} < 4$이므로 $f(n) = 3$

(i),(ii),(iii)에서 $f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(k)$ 중에서

$f(n) = 3$인 자연수의 개수를 p라 하면

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$

$= 15+130+3\times p = 145+3p$

$145+3p \ge 200 \ \therefore p \ge \dfrac{55}{3} = 18.\times\times$

따라서 조건을 만족하는 자연수 k 의 최솟값은 $80+19=99$