

1. 유리수 a, b 가 등식 $(a + \sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$$

무리수의 상등에 의하여

$$\text{유리수 부분 : } (a^2 + 2) = 6, a^2 = 4$$

$$\text{무리수 부분 : } 2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}, 2a = b$$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4, ab = 8 \\ a = -2, b = -4, ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$$\therefore ab = 8$$

2. 유리함수 $f(x) = \frac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3

② 2

③ 1

④ -1

⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x = \frac{ay}{3y+2}$

$$3xy + 2x = ay$$

$$\therefore y = \frac{-2x}{3x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-2x}{3x-a}$$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로

$$\frac{ax}{3x+2} = \frac{-2x}{3x-a}$$

$$\therefore a = -2$$

3. $y = \sqrt{4x - 12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3$, $\beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

4. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2, g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

5. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k 의 값을 구하여라. (단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5 \text{ 이므로}$$
$$k = 5$$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 30$, $n(A \cup B) = 56$, $n(A \cap B) = 12$ 일 때, $n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$56 = 30 + n(B) - 12$$

$$n(B) = 38$$

7. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 5$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

8. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ 을 만족시키는 실수 a, b, c 에 대하여 다음 식의 값은?

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = 0, ab + bc + ca = 0$$

($\because abc \neq 0$)

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

$$= \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{2(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

9. 두 수 $2p + 7$ 과 $2p + 9$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$2p + 7, p^2, 2p + 9 \text{ 가 등차수열을 이루므로 } p^2 = \frac{(2p + 7) + (2p + 9)}{2}$$

$$2p^2 = 4p + 16, p^2 - 2p - 8 = 0$$

$$(p + 2)(p - 4) = 0$$

따라서 $p = -2$ 또는 $p = 4$

이때, p 는 양수이므로 $p = 4$

10. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 공차가 각각 2, 3 인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot 3$$

$$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n - 1) \cdot 5$$

$$\therefore \text{공차} = 5$$

11. 수열 $\log \frac{1000}{3}, \log \frac{1000}{9}, \log \frac{1000}{27}, \log \frac{1000}{81}, \dots$ 에서 첫째항부터 몇째 항까지의 합이 최대가 되는가? (단, $\log 3 = 0.4771$)

① 제 5항

② 제 6항

③ 제 7항

④ 제 8항

⑤ 제 9항

해설

$$\begin{aligned}\log \frac{1000}{3} &= \log 10^3 - \log 3 \\ &= 3 - \log 3\end{aligned}$$

$$\log \frac{1000}{9} = 3 - 2 \log 3$$

$$\log \frac{1000}{27} = 3 - 3 \log 3$$

이므로 주어진 수열은

$$a = 3 - \log 3$$

$d = -\log 3$ 인 등차수열

$$\begin{aligned}a_n &= (3 - \log 3) + (n - 1) \cdot (-\log 3) \\ &= 3 - n \cdot \log 3\end{aligned}$$

그런데 $\log 3 = 0.4771$ 이므로

$$a_6 = 3 - 6 \log 3 = 0.1374$$

$$a_7 = 3 - 7 \log 3 = -0.3397$$

$\therefore$ 6 번째 항까지의 합이 최대

12. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36

② 45

③ 54

④ 63

⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r 이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r$, $9r^2$, $9r^3$ 으로 놓을 수 있다.

이때, $9r^4 = 144$ 이므로 $r^4 = 16$

$$r^4 - 16 = 0, (r^2 + 4)(r^2 + 2)(r^2 - 2) = 0$$

그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$

따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

13. 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000, 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

14. $a > 0$ 이고 m, n, p 가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2 + n^2}{mn}}$$

15. a, x, y 가 양의 실수이고 $A = \log_a x^2 - \log_a y^3$, $B = \log_a y^2 - \log_a x^3$ 일 때, 다음 중 $2A + 3B$ 와 같은 것은?(단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$

② $\log_a \frac{1}{y^5}$

③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$

⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

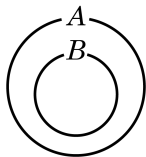
해설

$$A = \log_a x^2 - \log_a y^3 = 2\log_a x - 3\log_a y$$

$$B = \log_a y^2 - \log_a x^3 = 2\log_a y - 3\log_a x$$

$$\begin{aligned}\therefore 2A + 3B &= 2(2\log_a x - 3\log_a y) + 3(2\log_a y - 3\log_a x) \\ &= -5\log_a x = \log_a x^{-5} = \log_a \frac{1}{x^5}\end{aligned}$$

16. 두 집합 A, B 사이의 관계가 다음 벤 다이어그램과 같고, 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 고르면?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

$$\{4, 8, 12, \dots\} \subset A$$

$$\{8, 16, 24, \dots\} \subset A$$

$$\{10, 20, 30, \dots\} \subset A$$

따라서 ①, ③이다.

17. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 4개

② 8개

③ 12개

④ 24개

⑤ 32개

해설

‘적어도~’ 문제는 반대의 경우를 구하여 전체 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : 2^5 개 홀수만 가지고 만들 수 있는 부분집합 수 $\Rightarrow \{1, 3, 5\}$ 의 부분집합 수 : 2^3 개

$$\therefore 32 - 8 = 24(\text{개})$$

18. $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여

$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 의 원소의 합은?

① 30

② 35

③ 40

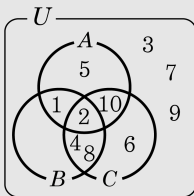
④ 45

⑤ 50

해설

$A = \{1, 2, 5, 10\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로

벤 다이어그램으로 나타내면



가 되어

$(A - B)^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ 이다. 따라서 원소의 합은 40 이다.

19. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 41 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 4$, $n(B^c) = 7$, $n(A^c \cap B^c) = 4$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$n(U) = 13$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 6$

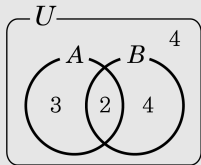
$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 4$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 4$

벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서

$n(A - B) = 13 - (6 + 4) = 3$ 이다.



20. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

① -3

② $-\frac{1}{3}$

③ 0

④ $\frac{1}{3}$

⑤ 3

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서

$x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 0$ 이다.

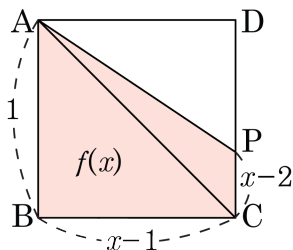
$x = 1, y = -1$ 을 대입하면

$f(0) = f(1+(-1)) = f(1) + f(-1) = 0$

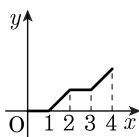
$f(-1) = -f(1), f(1) = 3$ 이므로

$\therefore f(-1) = -3$

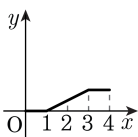
21. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



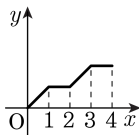
①



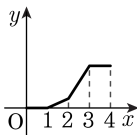
②



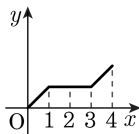
③



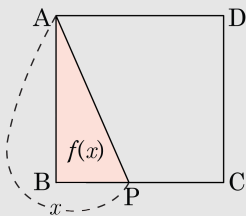
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

22. 집합 $X = \{x \mid x \leq a, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

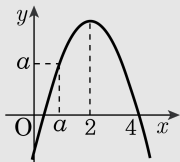
해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \leq 2$, $f(a) = a$

$$-a^2 + 4a = a \quad \therefore a = 0, 3$$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0



23. 정의역이 $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$, $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 에 대하여 $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ 2

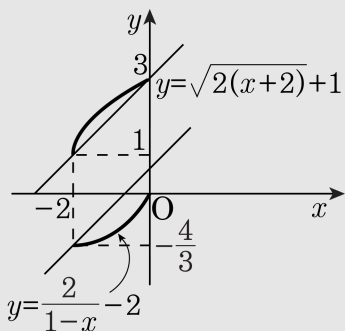
④ 3

⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 과 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다 아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x + r$ 의 그래프가

$y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프보다

위에 있으므로 $r > \frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{2}{3} < r < 3$$

따라서 $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -1$$

24. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 짝수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$ 가 참이다.

(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k+b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$ 이 참임을 증명한다.

k 가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k+2)$ 가 참임을 증명해야 한다.

$$\therefore a = 2, \quad b = 2$$

$$\therefore a + b = 4$$

25. 다음 중 값이 다른 것은?

① $(\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}$

② $\left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}}$

④ $(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}}$

해설

$$\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}} = (\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})^{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

① $\sqrt{2}\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$

② $\left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\frac{\sqrt{2}}{4}})^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\sqrt{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

④ $(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\sqrt{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

26. 집합 $A = \{a, d, e\}$ 이고 집합 $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, $A \cap X = \{a, e\}$, $c \notin X$, $X \cup B = B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 B 의 부분집합 중 원소 a, e 는 포함하고, 원소 c, d 는 포함하지 않는 부분집합의 수를 구한다.

$$2^{6-2-2} = 2^2 = 4 \text{ (개)}$$

27. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음의 조건을 모두 만족할 때, $n(A)$ 와 $n(B)$ 의 차를 구하여라.

(가) $n(U) = 20, n(A) \cdot n(B) = 60$

(나) $2 \cdot n(A \cap B) = n(A^c \cap B^c)$

(다) $n(A \cup B) = 3 \cdot n(A \cap B)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$n(A \cap B) = k$ 라 하면

$$2k = n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B) = 20 - n(A \cup B)$$

$$n(A \cup B) = 3k \text{에서 } 2k = 20 - 3k$$

$$\therefore k = 4, n(A \cup B) = 12$$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로

$$12 = n(A) + n(B) - 4$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 16$$

$n(A) \cdot n(B) = 60$ 이므로 더해서 16, 곱해서 60이 되는 두 수를 구하면 6 과 10 이다.

따라서 $n(A)$ 와 $n(B)$ 의 차는 $10 - 6 = 4$

28. $a + b + c = abc = 3\sqrt{3}$ 인 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a^4 + b^4 + c^4$ 의 최솟값은?

① 9

② $9\sqrt{3}$

③ $12\sqrt{3}$

④ 27

⑤ 81

해설

A, B, C 가 실수이면

$A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + BC + CA$ 가 성립한다.

$$\therefore a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab)$$

$$= abc(a + b + c)$$

$$\therefore a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

$$= (3\sqrt{3})^2 = 27$$

등호는 $a^2 = b^2 = c^2$, $ab = bc = ca$ 일 때,

즉 $a = c$ 일 때 성립. 따라서 최솟값은 27

29. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립) 을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2^3\sqrt{3}$

③ 6

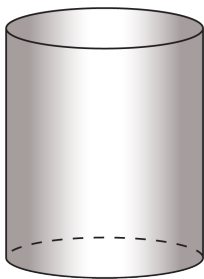
④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

30. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 1m^2 당 1만원이다. 보일러의 부피가 64m^3 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
 ④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x , 높이를 y 라 하면,

부피 V 는 $V = \pi x^2 y = 64 \dots \dots \textcircled{7}$

철판의 넓이를 S 라 하면

$$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$$

$$= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$$

$$= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3 \sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$$

단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,

곧 $x = 2$ 일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

31. 자연수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \text{는 홀수}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{는 짝수}) \end{cases} \quad \text{로 정의할 때, } f(f(x)) = 2 \text{ 를 만족시키}$$

는 x 의 값들의 합은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$ 에서 $f(x) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a 가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a 가 짝수일 때 $f(a) = \frac{a}{2} = 2 \therefore a = 4$

i), ii)에서 $f(x) = 1$ or $f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$ 일 때 x 가 홀수이면 존재하지 않고

x 가 짝수이면 $x = 2$

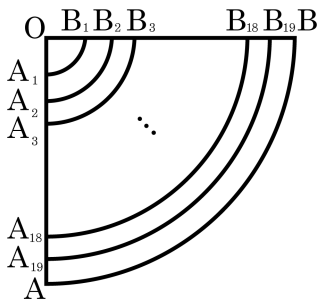
iv) $f(x) = 4$ 일 때 x 가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, 3, 8$

$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$

32. 다음 그림과 같이 사분원 OAB에 대하여 두 선분 OA, OB를 각각 20등분하여 19개의 호를 새로 만들었다. 사분원 OAB의 넓이가 π 일 때, 20개의 호의 길이의 총합이 $\frac{m}{n}\pi$ 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?(단, m, n 은 서로소인 정수)



① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

해설

사분원 OAB의 반지름의 길이를 r 이라 하면 사분원의 넓이는 $\frac{1}{4}\pi r^2 = \pi$ 이므로 $r = 2$ 이다.

이 때, $5.0\text{pt}\widehat{AB} = \frac{1}{4} \times 2\pi r =$

π , $5.0\text{pt}\widehat{A_1B_1} = \frac{\pi}{20}$ 이고, 20개의 호

$5.0\text{pt}\widehat{A_1B_1}, 5.0\text{pt}\widehat{A_2B_2}, \dots, 5.0\text{pt}\widehat{AB}$ 의 길이는 등차수열을 이루므로 구하는 호의 길이의 총합은

$$\frac{20\left(\frac{\pi}{20} + \pi\right)}{2} = \frac{21}{2}\pi$$

따라서, $m = 21, n = 2 \therefore m + n = 23$

33. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[4]{n}$ 의 정수 부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k)$ 의 값이 200 이상이 되도록 하는 자연수 k 의 최솟값은?

- ① 99 ② 100 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

(i) $1 \leq n < 16$ 일 때,

$$1^4 \leq n < 2^4 \text{이므로 } 1 \leq \sqrt[4]{n} < 2$$

$$\therefore f(n) = 1$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(15) = 15$$

(ii) $16 \leq n < 81$ 일 때,

$$2^4 \leq n < 3^4 \text{이므로 } 2 \leq \sqrt[4]{n} < 3$$

$$\therefore f(n) = 2$$

$$\therefore f(16) + f(17) + f(18) + \cdots + f(80)$$

$$= 2 \times 65 = 130$$

(iii) $81 \leq n < 256$ 일 때,

$$3 \leq \sqrt[4]{n} < 4 \text{이므로 } f(n) = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(k)$ 중에서

$f(n) = 3$ 인 자연수의 개수를 p 라 하면

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k)$$

$$= 15 + 130 + 3 \times p = 145 + 3p$$

$$145 + 3p \geq 200 \quad \therefore p \geq \frac{55}{3} = 18.\times \times$$

따라서 조건을 만족하는 자연수 k 의 최솟값은 $80 + 19 = 99$