1. $2012 = k$라 할 때, 2013×2011을 k로 나타내면?

① $k^2 + k$　② $k^2 - 1$　③ $k^2 + k + 1$
④ $k^2 - k + 1$　⑤ $k^2 - k$

해설

$$\begin{aligned} 2013 \times 2011 &= (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

2. BC의 중점이 M인 $\triangle ABC$가 있다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{AM} = 2$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$ 이므로

$5^2 + 3^2 = 2(\overline{BM}^2 + 2^2)$

$\therefore \overline{BM}^2 = 13$

$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\sqrt{13}$

3. 두 점 A$(-4,\ -3)$, B$(11,\ 9)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점의 좌표는?

① $(1,1)$　② $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$　③ $(3,3)$
④ $\left(\frac{7}{5},\frac{5}{2}\right)$　⑤ $(6,5)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 (x,y) 라 하면
$x=\frac{11-8}{1+2}=1,\ y=\frac{9-6}{1+2}=1$
$\therefore\ (1,\ 1)$

4. 세 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$, $5x+2y+k=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면
직선 $5x+2y+k=0$ 이 두 직선
$2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점을 지나야 한다.
두 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점이 $(-1,2)$ 이므로
$x=-1$, $y=2$를 $5x+2y+k=0$ 에 대입하면
$5\cdot(-1)+2\cdot2+k=0$
$\therefore\ k=1$

5. 방정식 $2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$

$\Rightarrow\ 2(x^2+2x+1-1)+2(y^2-2y+1-1)+3=0$

$\Rightarrow\ 2(x+1)^2+2(y-1)^2=1$

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 반지름 길이 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

(좌변) $=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$

$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$

$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i$ 이므로

$2-\frac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$

7. $\frac{5}{1+2i} = x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$

$1-2i = x+yi$

$x=1, y=-2, x+y=-1$

8. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A(4, 6), B(−2, 2)이고, 무게중심이 G(1, 3)일 때 꼭짓점 C의 좌표는?

① (−1, 1)　② (1, −1)　③ (1, 1)
④ (−1, −1)　⑤ (1, 2)

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.
점 C(x, y)라 하면,

$$\mathrm{G} = \left(\frac{4-2+x}{3},\ \frac{6+2+y}{3}\right) = (1,\ 3)$$

$\therefore\ x = 1,\ \ y = 1$

9. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$, $B(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$
② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$
③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$
④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$
⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 A, B 의 중점이므로,

$\left(\dfrac{1-3}{2},\ \dfrac{5-1}{2}\right)=(-1,\ 2)$ 이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

10. 방정식 $x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k<3$　② $k>3$　③ $0<k<3$
④ $k>2$　⑤ $k<2$

해설
$x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 을 완전제곱식으로 나타내면 $(x+2)^2+(y-3)^2=3-k$
원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로
$\sqrt{3-k}>0,\ 3-k>0 \quad \therefore\ k<3$

11. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

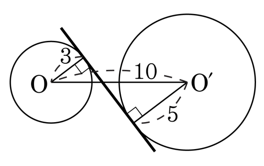
▶ 답：

▷ 정답： 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

12. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2-(3+5)^2}=6$

13. 직선 $3x+y-5=0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x+y-1=0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x+y-5=0$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-n$을 대입하면
$3(x-1)+(y-n)-5=0$
$3x+y-n-8=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $3x+y-1=0$과 일치하므로 $-n-8=-1$ $\therefore$ $n=-7$

14. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

15. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $\angle B=120^\circ$인 둔각삼각형
② 직각삼각형
③ $\angle B=150^\circ$인 둔각삼각형
④ 이등변삼각형
⑤ $\angle A=35^\circ$인 예각삼각형

해설

$a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=a^2(b-c)+a(c+b)(c-b)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2+(c+b)a+bc\}$
$=(b-c)(a+b)(a+c)$
$\therefore b=c\ (\because a+b\neq 0,\ a+c\neq 0)$

16. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 x, y는 실수이다.)

① 2 또는 −4 ② 2 또는 −3 ③ −1 또는 3
④ −1 또는 −3 ⑤ −1 또는 −2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)i$
$z^2=-9$
즉, z는 순허수이다.
$\therefore x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$
$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm3$을 연립하여 풀면
$y=\frac{2}{3} \rightarrow x=\frac{4}{3}$
$y=-\frac{4}{3} \rightarrow x=-\frac{8}{3}$
$\therefore x+y=2$ 또는 -4 이다.

17. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$의 두 근의 비가 $3 : 4$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 2$

해설

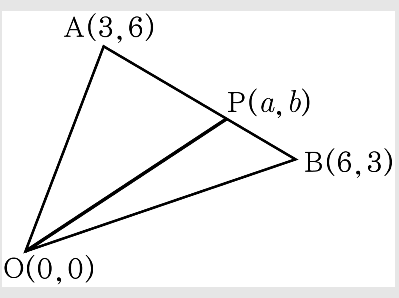
두 근을 $3\alpha,\ 4\alpha$라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$3\alpha + 4\alpha = 14k \cdots\cdots$ ㉠
$3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $7\alpha = 14k \ \therefore \alpha = 2k \cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $12\alpha^2 = 96k \ \therefore \alpha^2 = 8k \cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $4k^2 = 8k,\ 4k(k-2) = 0$
$\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
따라서 양수 k의 값은 $k = 2$이다.

18. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(6,3)$와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배일 때, $a-b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$와 $\triangle\mathrm{OAP}$의 높이가 같으므로
$\triangle\mathrm{OAP} = 2\triangle\mathrm{OBP}$이려면
P는 두 점 A, B를 $2:1$로 내분하여야 한다.
따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$
즉 $\mathrm{P}(5,4)$이므로 $a=5, b=4$
$\therefore a-b=1$



19. 두 직선 $ax+y=-3$, $2x+(a-1)y=6$이 평행할 때의 a값을 α, 일치할 때의 a값을 β라 할 때, $2\alpha+\beta$의 값은?

① -3 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 6

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고 y절편이 다르다.

$\Rightarrow\ y=-ax-3,\ \ y=-\dfrac{2}{a-1}x+\dfrac{6}{a-1}$

$\Rightarrow\ a=\dfrac{2}{a-1},\ \ a=2,-1 \quad \therefore\ \ a=2$

두 직선이 일치하려면 기울기, y절편이 같다.

$\therefore\ a=-1$

$\Rightarrow\ 2\alpha+\beta=4-1=3$

20. 세 부등식 $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq -2x+6$을 만족시키는 x, y 값에 대하여 $y-2x$ 의 최댓값과 최솟값을 구하면?

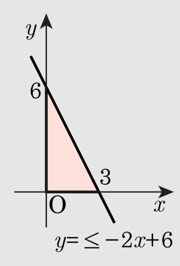
① 최댓값 : 6 , 최솟값 : -6　　② 최댓값 : 6 , 최솟값 : -4

③ 최댓값 : 4 , 최솟값 : -6　　④ 최댓값 : 4 , 최솟값 : 2

⑤ 최댓값 : 4 , 최솟값 : -4

해설

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq -2xx+6$ 를 만족시키는 x, y 를 구하기 위해 그래프를 그려보면 그림과 같으므로



$y-2x=k$ 라 하면

$y=2x+k$ 가

$(0, 6)$를 지날 때 최대,

$(3, 0)$을 지날 때 최소임을 알 수 있다.

$\therefore$ 최댓값 : 6, 최솟값 : -6

21. 1999 개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43 개　② 44 개　③ 45 개　④ 46 개　⑤ 47 개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ ($a,\ b$ 는 자연수) 라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n,\ a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$ 의 43 개

22. 양의 실수 a, b에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$　　② $2+3i$　　③ $5-2i$

④ $1-3i$　　⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A \ (a > 0,\ b > 0)$

① $a+b=-3,\ a-b=1$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)

② $a+b=2,\ a-b=3$

$\therefore\ a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ (부적당)

③ $a+b=5,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$ (양의 실수)

④ $a+b=1,\ a-b=-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)

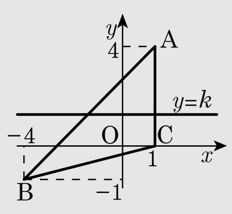
⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

23. 좌표평면 위의 세 점 $A(1, 4)$, $B(-4, -1)$, $C(1, 0)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y = k$가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4 - \sqrt{5}$ ② $4 - \sqrt{6}$ ③ $4 - \sqrt{7}$
④ $4 - 2\sqrt{2}$ ⑤ $4 - \sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y = \frac{-1-4}{-4-1}(x-1) + 4$

$\Rightarrow \quad y = x + 3$

$\therefore \quad y = k$와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3,\ k)$, $(1,\ k)$

$\Rightarrow$ 이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2} \times (1 - (k-3)) \times (4-k) = 5$

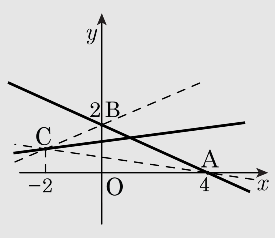
방정식을 풀면, $k = 4 \pm \sqrt{10}$

$\therefore \ k = 4 - \sqrt{10}$ ($\because \ k < 4$)

24. 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=kx+2k+1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}<k<2$
④ $-\frac{1}{6}<k<1$ ⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

해설



$y=-\frac{1}{2}x+2\cdots$ ㉠

$y=kx+2k+1\cdots$ ㉡

㉡ 을 k 에 대하여 정리하면

$k(x+2)+(1-y)=0$ 이므로

k 의 값에 관계없이 정점 C$(-2,\ 1)$ 을 지난다.

㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은

그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AC}}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,

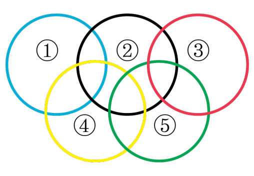
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기 k는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고

$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1 사분면에서 만난다.

$\therefore\ -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$

25. 다음 그림은 오륜기이며 1 번부터 5 번까지의 도형은 반지름이 2 인 원이다. ② 의 중심을 원점으로 하고, ①, ②, ③ 의 중심을 지나는 직선을 축으로 하는 직교좌표계를 사용한다. (①, ②, ③ 의 중심은 한 직선 위에 있으며, ④, ⑤ 의 중심을 이은 직선은 축 아래에 있으며 x 축에 평행) 각 원의 중심 간 거리는 모두 $2\sqrt{2}$ 이라고 할 때, 부등식 $x^2-4\sqrt{2}x+y^2+4\le 0$ 의 영역은?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2-4\sqrt{2}x+y^2+4=0$을 표준형으로 바꿔 보면,
$(x-2\sqrt{2})^2+y^2=4$
$(x-2\sqrt{2})^2+y^2=2^2$ 이 된다.
즉, 중심이 $(2\sqrt{2},\ 0)$ 이고 반지름이 2 인 원이다.
③ 의 중심은 ② 의 그것에 $2\sqrt{2}$ 만큼 떨어져 있고 반지름이 2 이다.
따라서 부등식 $x^2-4\sqrt{2}x+y^2+4\le 0$ 의 영역은 ③ 이다.