1. 588 을 588 보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 249

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$\frac{588}{a} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{a} = k^2 = b$라 하면,

a 는 3, $2^2 \times 3$, 3×7^2 이 가능하다.

$a = 3$ 일 때, $b = 14^2 = 196$

$a = 2^2 \times 3$ 일 때, $b = 7^2 = 49$

$a = 3 \times 7^2$ 일 때, $b = 2^2 = 4$

588 보다 작다고 했으므로 $a = 2^2 \times 3 \times 7^2$ 일 때는 제외한다.

$\therefore\ 196 + 49 + 4 = 249$

2. $3^2 \times 5 \times 7$ 에 자연수 a 를 곱하면 어떤 자연수의 제곱인 수가 된다. a 의 최솟값은?

① 5 ② 7 ③ 15 ④ 21 ⑤ 35

해설

$3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱인 수가 되려면 $3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 $5 \times 7 = 35$ 이다.

3. 75 에 가능한 한 작은 자연수 x로 나누어서 어떤 자연수 y 의 제곱이 되게 하려고 한다. y의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 9 ⑤ 15

해설

75 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$3 \overline{)\ 75}$
$5 \overline{)\ 25}$
$\quad 5$

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 $\dfrac{3 \times 5^2}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 자연수는 3 이다. 따라서 $y = 5$ 이다.

4. 60 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 20

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
곱해야 할 가장 작은 자연수는 $3 \times 5 = 15$

5. $60 \times 2^3 \times x$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, 가장 작은 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

$60 \times 2^3 \times x = 2^5 \times 3 \times 5 \times x$ 이므로
가장 작은 x 는 $2 \times 3 \times 5 = 30$

6. 18 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때 곱해야 할 자연수를 가장 작은 것부터 3 개를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$18 = 2 \times 3^2$
곱해야 할 자연수를 x 라 할 때,
$(2 \times 3^2) \times x = y^2$

$x = 2,\ 2 \times 2^2,\ 2 \times 3^2,\ \cdots$
$= 2,\ 8,\ 18,\ \cdots$

7. 120 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $2\times3\times5$ ② $2^3\times3\times5$ ③ $2\times3^3\times5$

④ $2\times3\times5\times7^2$ ⑤ $2^2\times3\times5$

해설

$120=2^3\times3\times5$ 로 소인수분해되므로 소인수 2, 3, 5의 지수가 홀수인 수를 곱한다.

$2^2\times3\times5$ 은 2^2 을 곱하였으므로 제곱수가 될 수 없다.

8. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 48 \\ \hline 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

9. $90 \times A = B^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

90 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $2 \times 3^2 \times 5 \times A = B^2$ 을 만족하는 A 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 2×5 이다.

10. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$2)\underline{600}$
$2)\underline{300}$
$2)\underline{150}$
$3)\underline{\ 75}$
$5)\underline{\ 25}$
$\ \ 5$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\dfrac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

11. 80 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$80 = 2^4 \times 5$
곱해야 할 가장 작은 자연수는 5

12. 540 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수는?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 15

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$540 \times x$ 가 제곱수가 되기 위한 가장 작은 x 는 $3 \times 5 = 15$

13. 28 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$28 \times a = b^2$ 에서
$28 = 2^2 \times 7$
$a = 7$
$2^2 \times 7 \times 7 = b^2$
$2^2 \times 7^2 = b^2$
$b = 2 \times 7 = 14$

14. $2 \times 3^2 \times 5$ 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 곱할 수 있는 수 중 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 소인수분해를 했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수이므로 $2 \times 3^2 \times 5$ 에서 2 와 5 의 지수가 홀수이므로 $2 \times 5 \times x^2$ 을 곱해주어야 하고 그 중 가장 작은 수는 2×5 이므로 10 이다.

15. $\frac{252}{a}$ 가 어떤 자연수의 제곱이라고 한다. a 가 1 보다 클 때, a 가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 지수가 홀수인 수 7 을 나누어 주면 $252 \div 7 = 36 = 6 \times 6$ 이 되어 6 의 제곱이 된다.

16. 140 에 어떤 자연수를 곱하였더니 자연수 b 의 제곱이 되었다. 곱할 수 있는 자연수 중 가장 작은 자연수를 a 라 할 때, $140 \times a$ 의 값은?

① 3600 ② 4900 ③ 6400

④ 8100 ⑤ 10000

해설

어떤 자연수를 소인수분해했을 때, 모든 소인수의 지수가 짝수이면 그 수는 다른 자연수의 제곱이 된다.

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$

5 와 7 의 지수가 홀수이므로 제곱수가 되기 위해 곱해 주어야 하는 수는 $5 \times 7 \times x^2$ (x^2 은 자연수) 꼴이다.

따라서 가장 작은 수 $a = 5 \times 7 = 35$ 이다.

$140 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 = (2 \times 5 \times 7)^2 = (70)^2 = 4900$

17. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 600 \\ 2 & 300 \\ 2 & 150 \\ 3 & 75 \\ 5 & 25 \\ & 5 \end{array}$$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\dfrac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

18. 360 을 가장 작은 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이 때, 나누어야 하는 가장 작은 자연수는?

① 1 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

따라서 나누어야 하는 가장 작은 자연수는 $2 \times 5 = 10$ 이다.

19. $315 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, a 가 될 수 있는 두 번째로 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 140

해설

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로
a 가 될 수 있는 수는 $5 \times 7 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
따라서, a 가 될 수 있는 가장 작은 자연수는 $5 \times 7 \times 1^2 = 35$ 이고, 두 번째 작은 자연수는
$5 \times 7 \times 2^2 = 140$ 이다.

20. $540 \times a = b^2$ 일 때, a 의 값 중 두 번째로 작은 수는? (단, a, b 는 자연수)

① 24 ② 38 ③ 56 ④ 60 ⑤ 72

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
$3 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
따라서, 곱할 수 있는 가장 작은 자연수는
$3 \times 5 \times 1^2 = 15$ 이고,
곱할 수 있는 두 번째 작은 자연수는
$3 \times 5 \times 2^2 = 60$ 이다.

21. 48 에 어떤 수 x 를 곱하여 자연수의 제곱이 되도록 하려 한다. 이러한 x 중 두 번째로 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로
가장 작은 $x = 3$
두 번째로 작은 수는 $2^2 \times 3 = 12$

22. 40 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이 때, 곱해야 할 자연수 중 300 이하의 자연수를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 10

▷ 정답: 40

▷ 정답: 90

▷ 정답: 160

▷ 정답: 250

해설

$40 = 2^3 \times 5$

곱해야 할 자연수를 x 라 할 때,

$(2^3 \times 5) \times x = y^2$

$x = 2 \times 5,\ 2^3 \times 5,\ 2 \times 3^2 \times 5,\ 2^5 \times 5,\ 2 \times 5^3$

$= 10,\ 40,\ 90,\ 160,\ 250,\ \cdots$

x 는 300 이하의 자연수 이므로

$10,\ 40,\ 90,\ 160,\ 250$

23. 48 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음에서 x 가 될 수 있는 수를 모두 고르면 (정답 2 개)?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 9 ⑤ 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$
곱해야 할 자연수가 x이고, 어떤 자연수를 y라 하면 $(2^4 \times 3) \times x = y^2$ 이다.
$x = 3 \times 1^2, 3 \times 2^2, \cdots$
$= 3, 12, \cdots$

24. 40 에 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되도록 하려고 한다. 제곱이 되도록 하기 위해서 곱하는 수를 작은 순으로 4 개를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 10

▷ 정답: 40

▷ 정답: 90

▷ 정답: 160

해설

$40 = 2^3 \times 5$
$40 \times n = 2^3 \times 5 \times n = x^2$ 에서
$n = 2 \times 5 \times k^2$ 꼴이므로
n 을 작은 순으로 4 개 써 보면
$n = 2 \times 5 \times 1^2 = 10$
$n = 2 \times 5 \times 2^2 = 40$
$n = 2 \times 5 \times 3^2 = 90$
$n = 2 \times 5 \times 4^2 = 160$
$\therefore$ 10, 40, 90, 160

25. 315 에 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되도록 하려고 한다. 제곱이 되도록 하기 위해서 곱하는 수 중 첫 번째로 작은 수와 세 번째로 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 35

▷ 정답: 315

해설

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$
$315 \times n = 3^2 \times 5 \times 7 \times n = x^2$ 에서
$n = 5 \times 7 \times k^2$ 꼴이므로
n 을 작은 순으로 3 개 써 보면
$n = 5 \times 7 \times 1^2 = 35$
$n = 5 \times 7 \times 2^2 = 140$
$n = 5 \times 7 \times 3^2 = 315$
$\therefore 35,\ 315$

26. 72 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이때, 곱할 수 있는 가장 작은 두 자리의 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$72 \times n = 2^3 \times 3^2 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 2$ 이므로
따라서 n 은
$n = 2 \times 1^2 = 2$
$n = 2 \times 2^2 = 8$
$n = 2 \times 3^2 = 18$
$n = 2 \times 4^2 = 32$
그러므로 가장 작은 두 자리의 자연수 n 은 18 이다.

27. 420 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 네 자리의 자연수는?

① 1024 ② 1280 ③ 1440 ④ 1680 ⑤ 2048

해설

$420 \times n = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 3 \times 5 \times 7$
따라서 n 은
$3 \times 5 \times 7 \times 1^2 = 105$
$3 \times 5 \times 7 \times 2^2 = 420$
$3 \times 5 \times 7 \times 3^2 = 945$
$3 \times 5 \times 7 \times 4^2 = 1680$
그러므로 가장 작은 네 자리의 자연수 n 은 1680 이다.

28. $\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$,

$\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2$, 2×3^2 , 2^3 , $2^3 \times 3^2$ 의 4 개이다.

29. $\frac{360}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$,

$\frac{360}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2 \times 5$, $n = 2 \times 3^2 \times 5$, $2^3 \times 5$, $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 4 개이다.

30. 자연수 $360 \times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 모두 구하시오.(단, n 은 160 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 40

▷ 정답 : 90

해설

$360 \times n = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 n은 2×5 이다.
따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는
$2 \times 5 = 10$
$2 \times 5 \times 2^2 = 40$
$2 \times 5 \times 3^2 = 90$
$\therefore$ 10, 40, 90

31. x는 $3^7 \times 5^4$ 의 약수 중에서 a^2 의 형태로 나타낼 수 있는 수일 때, x 값의 개수를 구하여라. (단, a 는 자연수)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

$3^7 \times 5^4$ 의 약수 중 (자연수)^2 이 되는 수는
$1,\ 3^2,\ (3^2)^2,\ (3^3)^2,\ 5^2,\ (5^2)^2,\ (3 \times 5)^2,$
$(3 \times 5^2)^2,\ (3^2 \times 5)^2,\ (3^2 \times 5^2)^2,\ (3^3 \times 5)^2,$
$(3^3 \times 5^2)^2$ 이다.
$\therefore$ 12개이다.

32. x는 $2^5 \times 7^3$의 약수 중에서 a^2의 형태로 나타낼 수 있는 수일 때, x 값의 개수는? (단, a는 자연수)

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$2^5 \times 7^3$의 약수 중 (자연수)^{2}이 되는 수는
$1,\ 2^2,\ (2^2)^2,\ 7^2,\ (2\times 7)^2,\ (2^2\times 7)^2$
$\therefore$ 6개이다.

33. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

① 9 ② 12 ③ 36 ④ 54 ⑤ 100

해설

$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$
가장 작은 $a = 2 \times 3 = 6$
$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$
$\therefore A = 12$