1. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$
② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$
④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$
$= x(2x+1)^2 + 1$

$2x+1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

2. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$
$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$
$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2) &= Y^2-8Y+12\\ &=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\ &=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

3. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.
$a - b = 2004 - 2001 = 3$
$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

4. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5　　② $\sqrt{29}$　　③ $\sqrt{33}$　　④ 6　　⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \ \rightarrow \ a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

5. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$
위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x=1,\ y=2,\ z=3$
$\therefore\ x+y+z=6$

6. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x - abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x + abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a, 세로를 b, 높이를 c 라고 했을 때
$(a^2+b^2)+c^2 = 28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176이므로
$a+b+c = 44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

7. 등식 $2x^2+x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 x에 대한 항등식일 때 $a+b+c$의 값은?

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x=2$를 대입해서 구한다.
$15=a+b+c$

8. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -4이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\,Q_1(x) + 5 \\ &= (x+2)\,Q_2(x) - 4 \\ &= (x-1)(x+2)\,Q_3(x) + R(x) \end{aligned}$$

$R(x) = ax + b$ 라 하면

$f(1) = 5$이므로

$R(1) = a + b = 5 \cdots$ ①

$f(-2) = -4$이므로

$R(-2) = -2a + b = -4 \cdots$ ②

①, ②에 의해 $a = 3,\ b = 2$이다.

$\therefore\ R(x) = 3x + 2 \Rightarrow R(2) = 8$

9. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2$,
$\therefore\ f(1)=2$
$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1$,
$\therefore\ g(1)=3$
$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

10. 다음 중 $(x+y)^3-8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2-2xy-4y^2$ ② $x^2-2xy+4y^2$ ③ $x^2+2xy+4y^2$
④ $x^2-4xy-7y^2$ ⑤ $x^2+4xy+7y^2$

해설

(준식)$=(x+y)^3-(2y)^3$
$=\{(x+y)-2y\}\{(x+y)^2+(x+y)2y+(2y)^2\}$
$=(x-y)(x^2+2xy+y^2+2xy+2y^2+4y^2)$
$=(x-y)(x^2+4xy+7y^2)$

11. 다항식 $6x^3+5x^2-2x-1$을 인수분해하면?

① $(x-1)(2x-1)(2x+1)$
② $(x+1)(2x+1)(2x-1)$
③ $(x+1)(2x+1)(3x-1)$
④ $(x+1)(2x-1)(3x+1)$
⑤ $(x-1)(2x+1)(2x-1)$

해설
$f(x)=6x^3+5x^2-2x-1$이라 하면
$f(-1)=0$이므로
$f(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ 6x^3+5x^2-2x-1=(x+1)(6x^2-x-1)$
$=(x+1)(2x-1)(3x+1)$

12. $\dfrac{100^3-1}{101\times100+1}$ 의 값을 구하면?

① 99 ② 100 ③ 101 ④ 102 ⑤ 103

해설

$a=100$이라 하면

$$\frac{a^3-1}{(a+1)a+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)}$$
$$=a-1=99$$

13. $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, y = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -2 ④ 3 ⑤ -4

해설

$x + y = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = 1$

$xy = (\frac{1+\sqrt{3}i}{2})(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}) = \frac{1-(-3)}{4} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^3+y^3}{xy}$

$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy}$

$= -2$

14. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+i)z-2i\bar{z}=5-3i$를 만족하는 복소수 z는? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$ ④ $2-i$ ⑤ $1-2i$

해설

임의의 복소수 $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(1+i)(a+bi)-2i(a-bi)=5-3i$

$a+bi+ai-b-2ai-2b=5-3i$

$(a-3b)+(-a+b)i=5-3i$

$$\begin{cases} a-3b=5 \\ -a+b=-3 \end{cases}$$

연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

$\therefore\ z=2-i$

15. $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \cdots + w^{100}$ 의 값은?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$　　③ 0

④ $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3i^2}{4} = 1$$

$1 + w + w^2 = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$$\therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \cdots + w^{100}$$

$$= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \cdots$$

$$+ w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w)$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w)$$

$$= 1 + w = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

16. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|a| + |b| - |a-b|$ 를 간단히 하면?

① $2a$　　② $-2b$　　③ 0　　④ $-2a$　　⑤ $2b$

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a| + |b| - |a-b| = a - b - (a-b) = 0$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<0$　② $k>0$　③ $0<k<\frac{1}{4}$
④ $k\le 0$　⑤ $k\ge 0$

해설

$x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이
허근을 가져야 하므로
x에 대한 내림차순으로 정리하면
$kx^2-kx+\frac{1}{4}(k+1)=0$
$D=(-k)^2-4k\cdot\frac{1}{4}(k+1)<0$
$=k^2-k^2-k=-k<0 \quad \therefore k>0$
$\therefore k>0$

18. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\ \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

19. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 합은 2이다.

② 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 차는 4이다.

③ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 곱은 5이다.

④ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은 -6이다.

해설

$ax^2+bx+c=0$에서

두근의 합 : $-\frac{b}{a}$

두근의 곱 : $\frac{c}{a}$

두근의 차 : $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

∴ ② (두근의 차)$=4i$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2-10x+m^2-2m=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, m의 값은? (단, $m>1$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

한 근을 2α라고 하면 다른 한 근은 3α이다
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2\alpha+3\alpha=5\alpha=10,\ \alpha=2$
$\therefore\ (2\alpha)\times(3\alpha)=6\alpha^2=m^2-2m$
$\therefore\ m^2-2m-24=0$
$(m+4)(m-6)=0 \quad \therefore\ m=6\ (\because\ m>1)$

21. 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2-3x+2=0$
② $x^2+4x+6=0$
③ $x^2+3x-4=0$
④ $x^2-4x+6=0$
⑤ $x^2+2x-3=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha+1)+(\beta+1)=4,$
$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=6$
$\therefore\ \alpha+1,\ \beta+1$을 근으로 하는 방정식은
$x^2-4x+6=0$

22. x에 관한 이차방정식 $x^2 - kx - 2k = 0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ (단, $\alpha > 0$)일 때, 유리수 k의 값은?

① -12 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 12

해설

$x^2 - kx - 2k = 0$의 두 근이 α, β

$\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = -2k$

$\alpha^2 = 6 + 2\sqrt{5},\ \alpha = \sqrt{5} + 1$

한 근이 $1 + \sqrt{5}$이면 β는 $1 - \sqrt{5}$

$\therefore\ \alpha + \beta = 2 = k$

23. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이 0 보다 크거나 같아야 한다.

$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$

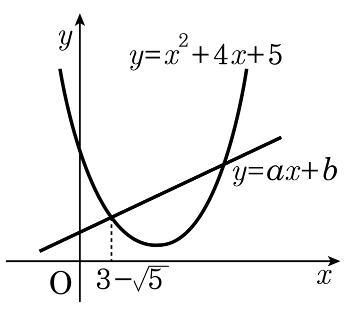
$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$

$\frac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$

$\Rightarrow k \geq -4$

$\therefore$ 최솟값 : -4

24. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠
이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$
$\therefore a + b = 3$

25. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x)-f(-x)=x^2-3x+8$

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면

$2(ax^2+bx+c)-(ax^2-bx+c)=x^2-3x+8$

$\Rightarrow b=-1, c=8, a=1$

$\therefore\ f(x)=x^2-x+8=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 최솟값 : $\frac{31}{4}$

26. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x,y에 대하여 $2x-y$ 는 $x=\alpha, y=\beta$ 에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면
$y=2x-k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x-k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x,y의 값은
㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0 \therefore x=2$
㉠에서 $y=4-5=-1$
따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로
$m+\alpha+\beta=6$

27. 4차방정식 $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$을 $(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 = 0$꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1 \pm \sqrt{3}i$　② $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$　③ $-1 \pm \sqrt{3}i$
④ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$　⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2$
$= x^4 + (2a - 4)x^2 - 4bx + a^2 - b^2$
이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로
$2 = 2a - 4,\ 4 = -4b,\ 8 = a^2 - b^2$
$\therefore a = 3,\ b = -1$
따라서 주어진 4차방정식은
다음과 같이 변형하면,
$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$
$\therefore\ (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3}i$ 또는 $x = -1 \pm i$

28. 삼차방정식 $x^3 + ax + b = 0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$　② 0　③ i　④ 1　⑤ -1

해설

$x = i$를 대입하면 $(i)^3 + ai + b = 0$ $(a-1)i + b = 0$
$a,\ b$는 실수이므로 $a = 1,\ \ b = 0$
$x^3 + x = 0,\ x(x^2+1) = 0,\ \ x = 0,\ i,\ -i$
$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$= 0$

29. 방정식 $2x^3-3x^2+6=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ r$라 할 때, $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3-3x^2+6=0$의 세 근이
$\alpha,\ \beta,\ r$이므로
$2x^3-3x^2+6=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)$
양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면
$4\sqrt{2}-6+6$
$=2(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$
$\therefore\ (\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)=2\sqrt{2}$

30. 국어, 수학, 영어의 세 문제집이 있다. 17000 원으로 국어와 수학 문제집을, 18000 원으로 수학과영어 문제집을 19000 원으로 국어와 영어 문제집을 살 수 있었다. 이 때, 수학 문제집의 가격은?

① 7000 원 ② 7500 원 ③ 8000 원
④ 8500 원 ⑤ 9000 원

해설

국어 문제집의 가격을 A 원, 수학 문제집의 가격을 B 원, 영어 문제집의 가격을 C 원이라고 하면,

$$\begin{cases} A+B=17000 \cdots ㉠ \\ B+C=18000 \cdots ㉡ \\ C+A=19000 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢를 해주면, $2(A+B+C)=54000$

$\therefore A+B+C=2700$

$\therefore A=9000,\ B=8000,\ C=10000$

$\therefore$ 수학 문제집의 가격은 8000 원

31. 연립방정식 $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x = 18,\ y = -1$ 또는 $x = 2,\ y = 3$

② $x = -2,\ y = -3$ 또는 $x = 2,\ y = 3$

③ $x = \frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 2,\ y = 3$

④ $x = \frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = -2,\ y = -3$

⑤ $x = -\frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = -2,\ y = -3$

해설

$\begin{cases} 2x + y = 7 \cdots ㉠ \\ x^2 + Y^2 = 3 \cdots ㉡ \end{cases}$

$y = -2x + 7$를 ㉡식에 대입

$x^2 + (2x - 7)^2 = 13$

$5x^2 - 28x + 36 = (5x - 18)(x - 2) = 0$

$\begin{cases} x = \frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5} \\ x = 2,\ y = 3 \end{cases}$

32. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 xy는?

① 8　　② 3　　③ 0　　④ -1　　⑤ -3

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ① \\ x^2+y^2=20 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $x=y+2$ 이것을 ②식에 대입하면

$(y+2)^2+y^2=20,\ 2y^2+4y-16=0$

$(y+4)(y-2)=0$

$\begin{cases} y=2, x=4 \Rightarrow xy=8 \\ y=-4, x=-2 \Rightarrow xy=8 \end{cases}$

해설

①식을 제곱하면 $(x-y)^2=4$

$x^2+y^2-2xy=4$

$\therefore xy=\dfrac{x^2+y^2-4}{2}=\dfrac{20-4}{2}=8$

33. 방정식 $2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$　　② -1　　③ $-\frac{1}{2}$　　④ $-\frac{1}{4}$　　⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$에서
$x^2+4xy+4y^2+x^2+2x+1=0$,
$(x+2y)^2+(x+1)^2=0$
x, y가 실수이므로 $x+2y=0$ $\cdots\cdots$ ①, $x+1=0$ $\cdots\cdots$ ②
①, ②에서 $x=-1,\ y=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x+y=-\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면$2x^2+2(2y+1)+(4y^2+1)=0$ $\cdots\cdots$ ①
x 가 실수이므로 $\frac{D}{4}=(2y+1)^2-2(4y^2+1)\ge 0$
$\therefore\ (2y-1)^2\le 0$
그런데 $2y-1$ 이 실수이므로 $2y-1=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
$2x^2+4x+2=0$, $(x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$ $\cdots\cdots$ ③
②, ③에서 $x+y=-\frac{1}{2}$

34. 부등식 $|x-1| \le 3x-1$ 의 해를 바르게 구한 것은?

① $x > 0$ ② $x \ge 0$ ③ $x \ge \frac{1}{2}$

④ $x \ge 1$ ⑤ $0 \le x \le \frac{1}{2}$

해설

(ⅰ) $x \ge 1$ 일 때

$x-1 \le 3x-1,\ 2x \ge 0$ 이므로 $x \ge 0$ $\therefore$ 조건과의 공통범위는 $x \ge 1$

(ⅱ) $x < 1$ 일 때

$-(x-1) \le 3x-1,\ 4x \ge 2,\ x \ge \frac{1}{2}$

$\therefore$ 조건과의 공통범위는 $\frac{1}{2} \le x < 1$

(ⅰ), (ⅱ) 에서 $x \ge \frac{1}{2}$

35. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a > 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$　② $a > -\frac{1}{2}$　③ $a > -\frac{1}{3}$
④ $a > -\frac{1}{4}$　⑤ $a > -\frac{1}{5}$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a > 0$에서

i) $a = 0$이면 $x > 0$
$\therefore$ 실수해가 존재한다.
ii) $a > 0$ 이면 $y = ax^2 + (a+1)x + a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로
$ax^2 + (a+1)x + a > 0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.
iii) $a < 0$이면 $D = (a+1)^2 - 4a^2 > 0$
$3a^2 - 2a - 1 < 0$, $(3a+1)(a-1) < 0$
$\therefore$ $-\frac{1}{3} < a < 1$, $a < 0$ 이므로 $-\frac{1}{3} < a < 0$

i), ii), iii) 에서 $a > -\frac{1}{3}$

36. 부등식 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)(x^2-|x|-2) \le 0$ 을 풀면?

① $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -2$　　② $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -1$
③ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -1$　　④ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -2$
⑤ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le 0$

해설

① $x > 0$ 이면 $|x| = x$, $x + \dfrac{1}{x} > 0$ 이므로
$x^2 - x - 2 \le 0 \ \rightarrow \ (x-2)(x+1) \le 0$
$\therefore \ -1 \le x \le 2$
$\therefore \ 0 < x \le 2 \ (\because \ x > 0)$
② $x < 0$ 이면 $|x| = -x$, $x + \dfrac{1}{x} < 0$ 이므로
$x^2 + x - 2 \ge 0 \ \rightarrow \ (x-1)(x+2) \ge 0$
$\therefore \ x \le -2, \ x \ge 1$
$\therefore \ x \le -2 \ (\because \ x < 0)$
①, ②에서 $0 < x \le 2, \ x \le -2$

37. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$ ② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$
③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$ ④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$
⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$에서 $[x]^2 \geq [x]+2$
$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$
$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$
$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

38. 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2ax+1$의 값이 x^2+2x-1의 값보다 크도록 하는 a의 범위를 구하면?

① $1<a<3$　② $1 \le a<3$　③ $1 \le a \le 4$

④ $1 \le a<4$　⑤ $1<a<4$

해설

$ax^2+2ax+1>x^2+2x-1$

$(a-1)x^2+2(a-1)x+2>0$

ⅰ) $a=1$ 항상 성립

ⅱ) $a>1$ 판별식 $D<0$에서

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-2(a-1)<0$

$(a-1)(a-3)<0,\ 1<a<3$

ⅰ), ⅱ)에서 $1 \le a<3$

39. 평지의 공원에 둘레의 길이는 $200\,\mathrm{m}$로 일정하고 넓이는 $900\,\mathrm{m}^2$ 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① $40\,\mathrm{m}$　② $50\,\mathrm{m}$　③ $90\,\mathrm{m}$
④ $100\,\mathrm{m}$　⑤ $150\,\mathrm{m}$

해설

화단의 가로 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)\,\mathrm{m}$이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x>0,\ 100-x>0$에서 $0<x<100\cdots$(가)
$900\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(100-x)\geq 900$
$x^2-100x+900\leq 0, (x-10)(x-90)\leq 0$
$\therefore 10\leq x\leq 90$
이것은 (가)를 만족하므로
가로의 최대 길이는 $90\,\mathrm{m}$이다.

40. 부등식 $x(x-1) < (x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$을 만족시키는 x의 값의 범위는?

① $0 < x < 1$ ② $x < 1$ ③ $0 < x < 2$
④ $x > 2$ ⑤ $1 < x < 3$

해설

ⅰ) $x(x-1) < (x-1)(x-2)$
$\Rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$
ⅱ) $(x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$
$\Rightarrow 2x < 4$
$\Rightarrow x < 2$
ⅰ)과 ⅱ)의 공통부분을 구하면
$\Rightarrow x < 1$