1. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$
② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$
④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$

$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$

$= x(2x+1)^2 + 1$

$2x+1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

2. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

3. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

4. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \ \rightarrow \ a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

5. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$

위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=2,\ z=3$

$\therefore\ x+y+z=6$

6. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$
$+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a, 세로를 b, 높이를 c 라고 했을 때
$(a^2+b^2)+c^2=28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176이므로
$a+b+c=44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

7. 등식 $2x^2 + x + 5 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$가 x에 대한 항등식일 때 $a+b+c$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x=2$를 대입해서 구한다.

$15 = a + b + c$

8. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -4이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x)+5 \\ &= (x+2)Q_2(x)-4 \\ &= (x-1)(x+2)Q_3(x)+R(x) \end{aligned}$$

$R(x)=ax+b$ 라 하면

$f(1)=5$이므로

$R(1)=a+b=5\cdots$①

$f(-2)=-4$이므로

$R(-2)=-2a+b=-4\cdots$②

①, ②에 의해 $a=3,\ b=2$이다.

$\therefore\ R(x)=3x+2 \Rightarrow R(2)=8$

9. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13　② -13　③ 16　④ -16　⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2,$

$\therefore\ f(1)=2$

$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1,$

$\therefore\ g(1)=3$

$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$2f(1)+3g(1)=2\cdot2+3\cdot3=13$

10. 다음 중 $(x+y)^3-8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2-2xy-4y^2$ ② $x^2-2xy+4y^2$ ③ $x^2+2xy+4y^2$

④ $x^2-4xy-7y^2$ ⑤ $x^2+4xy+7y^2$

해설

(준식)$=(x+y)^3-(2y)^3$

$=\{(x+y)-2y\}\{(x+y)^2+(x+y)2y+(2y)^2\}$

$=(x-y)(x^2+2xy+y^2+2xy+2y^2+4y^2)$

$=(x-y)(x^2+4xy+7y^2)$

11. 다항식 $6x^3+5x^2-2x-1$을 인수분해하면?

① $(x-1)(2x-1)(2x+1)$
② $(x+1)(2x+1)(2x-1)$
③ $(x+1)(2x+1)(3x-1)$
④ $(x+1)(2x-1)(3x+1)$
⑤ $(x-1)(2x+1)(2x-1)$

해설

$f(x)=6x^3+5x^2-2x-1$이라 하면
$f(-1)=0$이므로
$f(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ 6x^3+5x^2-2x-1=(x+1)(6x^2-x-1)$
$=(x+1)(2x-1)(3x+1)$

12. $\dfrac{100^3-1}{101\times100+1}$ 의 값을 구하면?

① 99 ② 100 ③ 101 ④ 102 ⑤ 103

해설

$a=100$ 이라 하면

$$\frac{a^3-1}{(a+1)a+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)}$$
$$=a-1=99$$

13. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -2 ④ 3 ⑤ -4

해설

$$x + y = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$xy = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{1-(-3)}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy} \\ &= -2 \end{aligned}$$

14. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+i)z-2i\bar{z}=5-3i$를 만족하는 복소수 z는? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$ ④ $2-i$ ⑤ $1-2i$

해설

임의의 복소수 $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(1+i)(a+bi)-2i(a-bi)=5-3i$

$a+bi+ai-b-2ai-2b=5-3i$

$(a-3b)+(-a+b)i=5-3i$

$$\begin{cases} a-3b=5 \\ -a+b=-3 \end{cases}$$

연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

$\therefore\ z=2-i$

15. $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1+w+w^2+\cdots+w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3=w\cdot w^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-3i^2}{4}=1$$

$1+w+w^2=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ &1+w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{100}\\ &=1+w+w^2+w^3(1+w+w^2)+\cdots\\ &\quad+w^{96}(1+w+w^2)+w^{99}(1+w)\\ &=0+0+\cdots+0+w^{99}(1+w)=(w^3)^{33}\cdot(1+w)\\ &=1+w=1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

16. 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|a| + |b| - |a-b|$ 를 간단히 하면?

① $2a$ ② $-2b$ ③ 0 ④ $-2a$ ⑤ $2b$

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a| + |b| - |a-b| = a - b - (a-b) = 0$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<0$　② $k>0$　③ $0<k<\frac{1}{4}$
④ $k\leq 0$　⑤ $k\geq 0$

해설

$x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이

허근을 가져야 하므로

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$kx^2-kx+\frac{1}{4}(k+1)=0$

$D=(-k)^2-4k\cdot\frac{1}{4}(k+1)<0$

$=k^2-k^2-k=-k<0 \quad \therefore k>0$

$\therefore k>0$

18. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots\text{㉠}$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots\text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

19. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 합은 2이다.

② 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 차는 4이다.

③ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 곱은 5이다.

④ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은 -6이다.

해설

$ax^2+bx+c=0$에서

두근의 합 : $-\dfrac{b}{a}$

두근의 곱 : $\dfrac{c}{a}$

두근의 차 : $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차)$=4i$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2-10x+m^2-2m=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, m의 값은? (단, $m>1$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

한 근을 2α라고 하면 다른 한 근은 3α이다

근과 계수와의 관계를 이용하면

$2\alpha+3\alpha=5\alpha=10,\ \alpha=2$

$\therefore\ (2\alpha)\times(3\alpha)=6\alpha^2=m^2-2m$

$\therefore\ m^2-2m-24=0$

$(m+4)(m-6)=0\quad\therefore\ m=6\ (\because\ m>1)$

21. 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2-3x+2=0$

② $x^2+4x+6=0$

③ $x^2+3x-4=0$

④ $x^2-4x+6=0$

⑤ $x^2+2x-3=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha+1)+(\beta+1)=4,$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=6$

$\therefore\ \alpha+1,\ \beta+1$을 근으로 하는 방정식은

$x^2-4x+6=0$

22. x에 관한 이차방정식 $x^2-kx-2k=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha^2=6+2\sqrt{5}$ (단, $\alpha>0$) 일 때, 유리수 k의 값은?

① -12 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 12

해설

$x^2-kx-2k=0$의 두 근이 α, β

$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=-2k$

$\alpha^2=6+2\sqrt{5},\ \alpha=\sqrt{5}+1$

한 근이 $1+\sqrt{5}$이면 β는 $1-\sqrt{5}$

$\therefore\ \alpha+\beta=2=k$

23. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이 0 보다 크거나 같아야 한다.

$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$

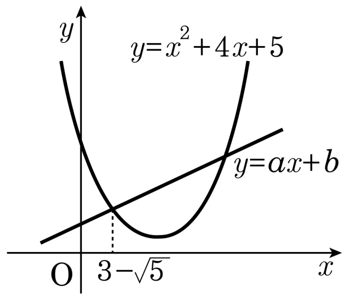
$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$

$\dfrac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$

$\Rightarrow k \geq -4$

$\therefore$ 최솟값 : -4

24. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠
이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$
$\therefore a + b = 3$

25. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x) - f(-x) = x^2 - 3x + 8$

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 - bx + c) = x^2 - 3x + 8$

$\Rightarrow b = -1, c = 8, a = 1$

$\therefore\ f(x) = x^2 - x + 8 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 최솟값 : $\frac{31}{4}$

26. $x^2 + y^2 = 5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x - y$는 $x = \alpha, y = \beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$2x - y = k$로 놓으면

$y = 2x - k \cdots$ ㉠

㉠을 $x^2 + y^2 = 5$에 대입하면

$x^2 + (2x - k)^2 = 5$

$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉡

㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면

x가 실수이므로

$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5)\ 0$, $k^2 \le 25$

$\therefore -5 \le k \le 5$

따라서 k의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y의 값은

㉡에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0$, $5(x-2)^2 = 0 \ \therefore x = 2$

㉠에서 $y = 4 - 5 = -1$

따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$이므로

$m + \alpha + \beta = 6$

27. 4차방정식 $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$을 $(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 = 0$꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1 \pm \sqrt{3}i$ ② $1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $-1 \pm \sqrt{3}i$
④ $-1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2$
$= x^4 + (2a - 4)x^2 - 4bx + a^2 - b^2$
이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로
$2 = 2a - 4,\ 4 = -4b,\ 8 = a^2 - b^2$
$\therefore a = 3,\ b = -1$
따라서 주어진 4차방정식은
다음과 같이 변형하면,
$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$
$\therefore\ (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3}i$ 또는 $x = -1 \pm i$

28. 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$ ② 0 ③ i ④ 1 ⑤ -1

해설

$x=i$를 대입하면 $(i)^3+ai+b=0$ $(a-1)i+b=0$

$a,\ b$는 실수이므로 $a=1,\ \ b=0$

$x^3+x=0,\ x(x^2+1)=0,\ \ x=0,\ i,\ \ -i$

$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$=0$

29. 방정식 $2x^3-3x^2+6=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ r$라 할 때, $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3-3x^2+6=0$의 세 근이
$\alpha,\ \beta,\ r$이므로
$2x^3-3x^2+6=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)$
양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면
$4\sqrt{2}-6+6$
$=2(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$
$\therefore\ (\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)=2\sqrt{2}$

30. 국어, 수학, 영어의 세 문제집이 있다. 17000 원으로 국어와 수학 문제집을, 18000 원으로 수학과영어 문제집을 19000 원으로 국어와 영어 문제집을 살 수 있었다. 이 때, 수학 문제집의 가격은?

① 7000 원 ② 7500 원 ③ 8000 원

④ 8500 원 ⑤ 9000 원

해설

국어 문제집의 가격을 A 원, 수학 문제집의 가격을 B 원, 영어 문제집의 가격을 C 원이라고 하면,

$$\begin{cases} A + B = 17000 \cdots ㉠ \\ B + C = 18000 \cdots ㉡ \\ C + A = 19000 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢를 해주면, $2(A + B + C) = 54000$

$\therefore\ A + B + C = 2700$

$\therefore\ A = 9000,\ B = 8000,\ C = 10000$

$\therefore$ 수학 문제집의 가격은 8000 원

31. 연립방정식 $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x = 18,\ y = -1$ 또는 $x = 2,\ y = 3$

② $x = -2,\ y = -3$ 또는 $x = 2,\ y = 3$

③ $x = \frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 2,\ y = 3$

④ $x = \frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = -2,\ y = -3$

⑤ $x = -\frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = -2,\ y = -3$

해설

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \cdots ㉠ \\ x^2 + Y^2 = 3 \cdots ㉡ \end{cases}$$

$y = -2x + 7$를 ㉡식에 대입

$x^2 + (2x - 7)^2 = 13$

$5x^2 - 28x + 36 = (5x - 18)(x - 2) = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{18}{5},\ y = -\frac{1}{5} \\ x = 2,\ y = 3 \end{cases}$$

32. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 xy는?

① 8　② 3　③ 0　④ -1　⑤ -3

해설

$$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ① \\ x^2+y^2=20 & \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $x=y+2$ 이것을 ②식에 대입하면

$(y+2)^2+y^2=20,\ 2y^2+4y-16=0$

$(y+4)(y-2)=0$

$$\begin{cases} y=2, x=4 \Rightarrow xy=8 \\ y=-4, x=-2 \Rightarrow xy=8 \end{cases}$$

해설

①식을 제곱하면 $(x-y)^2=4$

$x^2+y^2-2xy=4$

$$\therefore xy=\frac{x^2+y^2-4}{2}=\frac{20-4}{2}=8$$

33. 방정식 $2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$에서
$x^2+4xy+4y^2+x^2+2x+1=0$,
$(x+2y)^2+(x+1)^2=0$
x, y가 실수이므로 $x+2y=0$ $\cdots\cdots$ ①, $x+1=0$ $\cdots\cdots$ ②
①, ②에서 $x=-1,\ y=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x+y=-\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면$2x^2+2(2y+1)+(4y^2+1)=0$ $\cdots\cdots$ ①
x 가 실수이므로 $\frac{D}{4}=(2y+1)^2-2(4y^2+1)\geq 0$
$\therefore\ (2y-1)^2\leq 0$
그런데 $2y-1$ 이 실수이므로 $2y-1=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
$2x^2+4x+2=0$, $(x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$ $\cdots\cdots$ ③
②, ③에서 $x+y=-\frac{1}{2}$

34. 부등식 $|x-1| \le 3x-1$의 해를 바르게 구한 것은?

① $x > 0$
② $x \ge 0$
③ $x \ge \frac{1}{2}$
④ $x \ge 1$
⑤ $0 \le x \le \frac{1}{2}$

해설

(i) $x \ge 1$일 때

$x-1 \le 3x-1$, $2x \ge 0$이므로 $x \ge 0$ ∴ 조건과의 공통범위는 $x \ge 1$

(ii) $x < 1$일 때

$-(x-1) \le 3x-1$, $4x \ge 2$, $x \ge \frac{1}{2}$

∴ 조건과의 공통범위는 $\frac{1}{2} \le x < 1$

(i), (ii)에서 $x \ge \frac{1}{2}$

35. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a>-\frac{1}{2}$ ③ $a>-\frac{1}{3}$

④ $a>-\frac{1}{4}$ ⑤ $a>-\frac{1}{5}$

해설

$ax^2+(a+1)x+a>0$에서

i) $a=0$이면 $x>0$

$\therefore$ 실수해가 존재한다.

ii) $a>0$ 이면 $y=ax^2+(a+1)x+a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로

$ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.

iii) $a<0$이면 $D=(a+1)^2-4a^2>0$

$3a^2-2a-1<0$, $(3a+1)(a-1)<0$

$\therefore$ $-\frac{1}{3}<a<1$, $a<0$ 이므로 $-\frac{1}{3}<a<0$

i), ii), iii) 에서 $a>-\frac{1}{3}$

36. 부등식 $\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2-|x|-2)\le 0$ 을 풀면?

① $0<x\le 1$ 또는 $x\le -2$
② $0<x\le 1$ 또는 $x\le -1$
③ $0<x\le 2$ 또는 $x\le -1$
④ $0<x\le 2$ 또는 $x\le -2$
⑤ $0<x\le 2$ 또는 $x\le 0$

해설

① $x>0$이면 $|x|=x,\ x+\frac{1}{x}>0$이므로

$x^2-x-2\le 0 \ \rightarrow\ (x-2)(x+1)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 2$

$\therefore\ 0<x\le 2\ (\because\ x>0)$

② $x<0$이면 $|x|=-x,\ x+\frac{1}{x}<0$이므로

$x^2+x-2\ge 0 \ \rightarrow\ (x-1)(x+2)\ge 0$

$\therefore\ x\le -2,\ x\ge 1$

$\therefore\ x\le -2\ (\because\ x<0)$

①, ②에서 $0<x\le 2,\ x\le -2$

37. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$

③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$

⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$에서 $[x]^2 \geq [x]+2$

$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$

$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$

$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

38. 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2ax+1$의 값이 x^2+2x-1의 값보다 크도록 하는 a의 범위를 구하면?

① $1<a<3$ ② $1 \le a<3$ ③ $1 \le a \le 4$

④ $1 \le a<4$ ⑤ $1<a<4$

해설

$ax^2+2ax+1>x^2+2x-1$

$(a-1)x^2+2(a-1)x+2>0$

ⅰ) $a=1$ 항상 성립

ⅱ) $a>1$ 판별식 $D<0$에서

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-2(a-1)<0$

$(a-1)(a-3)<0,\ 1<a<3$

ⅰ), ⅱ)에서 $1 \le a<3$

39. 평지의 공원에 둘레의 길이는 200 m로 일정하고 넓이는 900 m^2 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① 40 m ② 50 m ③ 90 m

④ 100 m ⑤ 150 m

해설

화단의 가로 길이를 x m라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)$ m이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x > 0,\ 100 - x > 0$에서 $0 < x < 100 \cdots$ ㈎
900 m^2 이상이므로
$x(100-x) \geq 900$
$x^2 - 100x + 900 \leq 0,\ (x-10)(x-90) \leq 0$
$\therefore 10 \leq x \leq 90$
이것은 ㈎를 만족하므로
가로의 최대 길이는 90 m이다.

40. 부등식 $x(x-1) < (x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는?

① $0 < x < 1$ ② $x < 1$ ③ $0 < x < 2$

④ $x > 2$ ⑤ $1 < x < 3$

해설

ⅰ) $x(x-1) < (x-1)(x-2)$

$\Rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$

ⅱ) $(x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$

$\Rightarrow 2x < 4$

$\Rightarrow x < 2$

ⅰ)과 ⅱ)의 공통부분을 구하면

$\Rightarrow x < 1$