1. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$일 때
$x^2-2x+1+x-1-6=0$
$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로
$x=-2, x=3$
그런데 $x \geq 1$이므로 $x=3$
(ii) $x<1$일 때
$x^2-2x+1-x+1-6=0$
$x^2-3x-4=0, (x-4)(x+1)=0$
$x=-1, x=4$
그런데 $x<1$이므로 $x=-1$
(i), (ii)에서 $x=3,-1$이므로
두 근의 합은 2

2. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

3. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

4. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 상수 k의 범위는?

① $k \le -1,\ k \ge 2$
② $k \le -1$
③ $2 \le k < 3$
④ $1 < k < 3$
⑤ $k \le -1,\ 2 \le k < 3$

해설

㉠ 두 근이 실수가 되어야 하므로 $\frac{D}{4} \ge 0$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2-(3-k) = k^2-k-2 \ge 0$

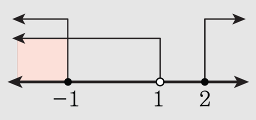
$(k-2)(k+1) \ge 0$

$\therefore\ k \le -1, k \ge 2 \cdots$ ㉮

㉡ 둘 다 양수이려면 합 >0 이고, 곱 >0

$-2(k-1)>0,\ 3-k>0 \cdots$ ㉯

$\therefore\ k<1$

$\Rightarrow$  $\therefore\ k \le -1$

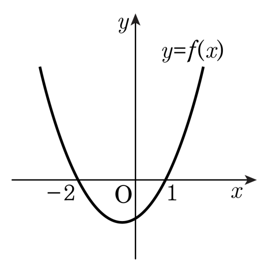
5. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$
② $k < -2$ 또는 $k > 2$
③ $k < -1$ 또는 $k > 1$
④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$
⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$
$D = K^2 - 16 > 0$이어야 하므로 $(k+4)(k-4) > 0$
$\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

6. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3　　② -2　　③ -1

④ 0　　⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y = f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y = f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$
$\therefore a = -3$

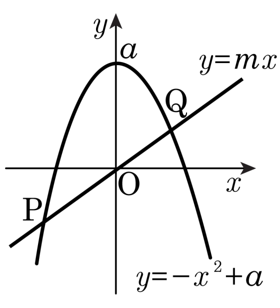
7. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ $\sqrt{2}$　⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.
$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$
$\therefore -2 < a < 2$
$f(a) = (a-1)^2 + 1$
$\therefore$ $a = 1$ 일 때, 최솟값 1

8. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

9. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$

이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.

$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$

따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

10. 이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y-1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2-(a+y)x-(2y^2+3y+1)=0$

근의 공식에서

$$x=\frac{a+y\pm\sqrt{(a+y)^2+4(2y^2+3y+1)}}{2}$$

$$=\frac{a+y\pm\sqrt{9y^2+2(a+6)y+a^2+4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식($=D$) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2+4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2+4)=-8a^2+12a=0$$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

11. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$q=\dfrac{1}{4}p^2+2p+5=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$q=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

12. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 2x - y = 0$ 에서 $y = x^2 - 2x$
이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면
$3x^2 - 2(x^2 - 2x) = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$
따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

13. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$\therefore$ $D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$
$\rightarrow$ $4y^2+16y-20\leq 0$
$\rightarrow$ $y^2+4y-5\leq 0$
$\rightarrow$ $(y+5)(y-1)\leq 0$
$\therefore$ $-5\leq y\leq 1$
$\therefore$ y 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

14. $x^2-3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$ 라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 8　　④ 11　　⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=1$
또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$
$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$
$\alpha,\ \beta$ 는 $x^2-3x+1=0$ 의 근이므로
$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$
$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$
$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$=4+6+1=11$

15. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$　② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$
③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$　④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$
⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설
x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면
$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$
$2x^2+2ix-2(1+i)=0$
$(x-1)\{x+(1+i)\}=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

16. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \ \pm 1$　　② $0, \ \pm 2$　　③ $\pm 1, \ \pm 2$

④ $\pm 2, \ \pm 3$　　⑤ $\pm 3, \ \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ 에서
$x \geq 0$ 일 때,
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$
(ii) $x < 0$ 일 때,
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x+2)(x+3) = 0$
$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = \pm 2, \ x = \pm 3$

17. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

18. 이차방정식 $x^2+2(k-m)x+(k^2-n+4)=0$이 실수 k값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 $m+n$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.
$D'=(k-m)^2-(k^2-n+4)=0$
모든 k에 대해 성립하려면
$-2m=0$, 그리고 $m^2+n-4=0$
$\therefore m=0, \quad n=4, \quad m+n=4$

19. 이차방정식 $x^2-7x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 12

해설

$x^2-7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=1$
$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=7+2=9$
따라서 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3$

20. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이 0 보다 크거나 같아야 한다.

$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$

$\frac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$

$\Rightarrow k \geq -4$

$\therefore$ 최솟값 : -4

21. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ $y = x + 1$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하여라.

① $m < -2,\ \ m > \frac{2}{3}$ ② $m < -1,\ \ m > \frac{2}{3}$

③ $m < -2,\ \ m > 2$ ④ $m < 2,\ \ m > \frac{2}{3}$

⑤ $m < -5,\ \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족시키도록 m을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서 판별식

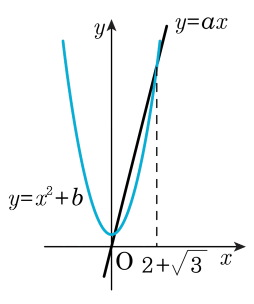
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$

$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$

$(3m-2)(m+2) > 0$

$\therefore\ \ m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

22. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + b = ax$,
즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
이때, a, b 는 모두 유리수이므로
방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
$\therefore\ a + b = 5$

23. $a^2+b^2=5$인 관계에 있는 두 실수 a, b에 대하여 $f(x)=x^2-4ax+b^2$의 최솟값을 상수 k라 할 때, k의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x) = x^2 - 4ax + b^2$
$\quad = (x-2a)^2 + b^2 - 4a^2$에서

$k = b^2 - 4a^2 = (5-a^2) - 4a^2 = -5a^2 + 5$

$\therefore$ 따라서 k의 최댓값은 5

24. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.