1. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(ⅰ) $x \geq 1$일 때

$x^2-2x+1+x-1-6=0$

$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로

$x=-2$, $x=3$

그런데 $x \geq 1$이므로 $x=3$

(ⅱ) $x<1$일 때

$x^2-2x+1-x+1-6=0$

$x^2-3x-4=0$, $(x-4)(x+1)=0$

$x=-1$, $x=4$

그런데 $x<1$이므로 $x=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3, -1$이므로

두 근의 합은 2

2. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

3. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28$, $c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6$, $b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

4. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 상수 k의 범위는?

① $k \le -1,\ k \ge 2$

② $k \le -1$

③ $2 \le k < 3$

④ $1 < k < 3$

⑤ $k \le -1,\ 2 \le k < 3$

해설

㉠ 두 근이 실수가 되어야 하므로 $\dfrac{D}{4} \ge 0$

$\dfrac{D}{4} = (k-1)^2 - (3-k) = k^2 - k - 2 \ge 0$

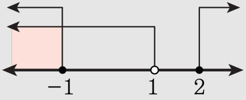
$(k-2)(k+1) \ge 0$

$\therefore\ k \le -1, k \ge 2 \cdots$ ㉮

㉡ 둘 다 양수이려면 합 > 0 이고, 곱 > 0

$-2(k-1) > 0,\ 3-k > 0 \cdots$ ㉯

$\therefore\ k < 1$

$\Rightarrow$  $\therefore\ k \le -1$

5. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$
② $k < -2$ 또는 $k > 2$
③ $k < -1$ 또는 $k > 1$
④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$
⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

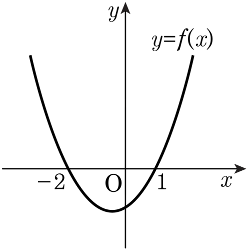
해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$

$D = K^2 - 16 > 0$이어야 하므로 $(k + 4)(k - 4) > 0$

$\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

6. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

7. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.

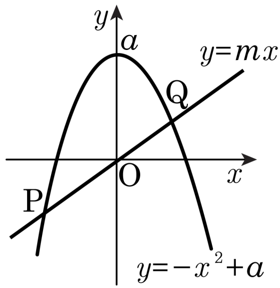
$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$

$\therefore -2 < a < 2$

$f(a) = (a-1)^2 + 1$

$\therefore\ a = 1$ 일 때, 최솟값 1

8. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로

방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$

$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$

$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

9. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

10. 이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y-1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2-(a+y)x-(2y^2+3y+1)=0$

근의 공식에서

$$x=\frac{a+y\pm\sqrt{(a+y)^2+4(2y^2+3y+1)}}{2}$$

$$=\frac{a+y\pm\sqrt{9y^2+2(a+6)y+a^2+4}}{2}$$

주어진 식이 x, y에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식($=D$) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2+4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2+4)=-8a^2+12a=0$$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

11. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha|=\frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1}=|2|$$

$$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$$

$$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$$

양변을 제곱하면

$$(p+4)^2-4(q-2)=4$$

q에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

12. $x^2-2x-y=0$ 일 때, $3x^2-2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -4

해설

$x^2-2x-y=0$ 에서 $y=x^2-2x$
이 식을 $3x^2-2y$ 에 대입하면
$3x^2-2\left(x^2-2x\right)=x^2+4x=(x+2)^2-4$
따라서, $x=-2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

13. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$

$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\leq 0$

$\rightarrow\ y^2+4y-5\leq 0$

$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\leq 0$

$\therefore\ -5\leq y\leq 1$

$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

14. $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 11 ⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1$

또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$

$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2-3x+1=0$의 근이므로

$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$

$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$

$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$=4+6+1=11$

15. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$

② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$

④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\{x+(1+i)\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

16. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \ \pm 1$ ② $0, \ \pm 2$ ③ $\pm 1, \ \pm 2$

④ $\pm 2, \ \pm 3$ ⑤ $\pm 3, \ \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$에서

$x \geq 0$일 때,

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$

(ii) $x < 0$일 때,

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$

(i), (ii)에서 $x = \pm 2, \ x = \pm 3$

17. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y-4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

18. 이차방정식 $x^2+2(k-m)x+(k^2-n+4)=0$이 실수 k값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 $m+n$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.

$D' = (k-m)^2 - (k^2-n+4) = 0$

모든 k에 대해 성립하려면

$-2m = 0$, 그리고 $m^2+n-4=0$

$\therefore m=0, \quad n=4, \quad m+n=4$

19. 이차방정식 $x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 12

해설

$x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha + \beta = 7$, $\alpha\beta = 1$

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 7 + 2 = 9$

따라서 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$

20. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이 0 보다 크거나 같아야 한다.

$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$

$\dfrac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$

$\Rightarrow k \geq -4$

$\therefore$ 최솟값 : -4

21. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하여라.

① $m < -2,\quad m > \dfrac{2}{3}$
② $m < -1,\quad m > \dfrac{2}{3}$
③ $m < -2,\quad m > 2$
④ $m < 2,\quad m > \dfrac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\quad m > \dfrac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족시키도록 m을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서 판별식

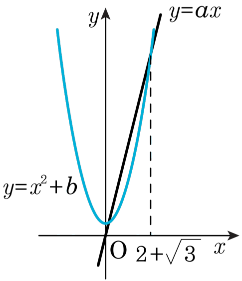
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$

$(m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$

$(3m-2)(m+2) > 0$

$\therefore\quad m < -2\ ,\ m > \dfrac{2}{3}$

22. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=x^2+b$ 의 그래프와 직선 $y=ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2+\sqrt{3}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2+b=ax$,

즉 $x^2-ax+b=0$ 의 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이다.

이때, a, b 는 모두 유리수이므로

방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이면

다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$,

$b=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

$\therefore\ a+b=5$

23. $a^2+b^2=5$인 관계에 있는 두 실수 a, b에 대하여 $f(x)=x^2-4ax+b^2$의 최솟값을 상수 k라 할 때, k의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = x^2 - 4ax + b^2$$
$$= (x-2a)^2 + b^2 - 4a^2$$에서

$$k = b^2 - 4a^2 = (5-a^2) - 4a^2 = -5a^2 + 5$$

$\therefore$ 따라서 k의 최댓값은 5

24. 함수 $y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t=x^2-2x+3$ 으로 놓으면

$y=t^2-2t+1=(t-1)^2\cdots$ ㉠

또, $t=(x-1)^2+2$ 이므로

$t\geq 2\cdots$ ㉡

㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은

$t=2$일 때 1이다.