1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

2. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면
$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$
실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$
순허수가 되기 위해서는
$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$
$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$
$(-3)\times(-1)\times 2=6$

3. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

4. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$의 값을 구하면?

① i　② 2　③ 1　④ 0　⑤ $2i$

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i,\ \frac{1+i}{1-i}=i$

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)-f(i)$

$=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}$

$=(-i)^{1000}-(i)^{1000}$

$=1-1$

$=0$

5. $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$

$=\{1+(-i)+(-1)+i\}+\{1+(-i)+(-1)+i\}+1$

$=1$

6. 다음을 계산하여라.

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : i

해설

$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$
$= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \cdots$
$\cdots + (i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}) + (i^{2005} + i^{2006})$
$= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1)$
$+ \cdots + (i - 1 - i + 1) + (i - 1)$
$= i$

7. 복소수 $w = 2 - i$ 에 대하여 $\frac{w}{w+1} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$ 의 값은? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

해설

$\overline{w} = 2 + i$

$$\frac{w}{w+1} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$$

$$= \frac{2-i}{3-i} + \frac{2+i}{3+i}$$

$$= \frac{(2-i)(3+i) + (2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$= \frac{14}{10}$$

$$= \frac{7}{5}$$

해설

$\omega + \overline{\omega} = 4, \omega\overline{\omega} = 5$

$$\frac{w}{w+1} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}+1} = \frac{2\omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega}}{\omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega} + 1} = \frac{10+4}{5+4+1} = \frac{7}{5}$$

8. 등식 $x(3+4i)+\overline{y(1+i)} = 5+2i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x(3+4i)+\overline{y(1+i)}$
$= 3x+4xi+y-yi$
$= (3x+y)+(4x-y)i$
$= 5+2i$
$\therefore\ 3x+y=5,\ 4x-y=2$
$x=1,\ y=2$
$\therefore\ x+y=3$

9. $z=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때 z^5+3z 를 간단히 하면?

① $1+\sqrt{3}i$ ② $2+\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$
④ $2+2\sqrt{3}i$ ⑤ $3+3\sqrt{3}i$

해설

$z=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 에서 $z^2-z+1=0 \therefore z^3=-1$

$z^5+3z=-z^2+3z=-(z-1)+3z=1+2z$

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이므로 $1+2z=2+\sqrt{3}i$

10. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

11. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$
$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$
$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$
만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.
$a \neq 2, \therefore \ a=-4$

12. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$

$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$) = 4$

13. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$ 에서

$n = 1$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$

$n = 2$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

$n = 3$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$

$n = 4$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4 이다.

14. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 10　　⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$
$= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta)$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$
$= (1 + i)(1 - i)$
$= 2$

15. $i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + 5i^5 - 6i^6 + \cdots - 100i^{100} = a + bi$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -100 ② -50 ③ 0 ④ 25 ⑤ 50

해설

준식$= i + 2 - 3i - 4 + 5i + 6 - 7i - 8 + \cdots$

$= \{(1 + 5 + 9 + \cdots + 97) - (3 + 7 + \cdots + 99)\} i$

$+ \{(2 + 6 + \cdots + 98) - (4 + 8 + \cdots + 100)\}$

$= (1225 - 1275)i + (1250 - 1300) = -50 - 50i$ 따라서 $a = -50$, $b = -50$ 이므로 $a + b = -100$