1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

2. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$

실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$

순허수가 되기 위해서는

$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$

$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$

$(-3)\times(-1)\times 2=6$

3. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

4. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하면?

① i　② 2　③ 1　④ 0　⑤ $2i$

해설

$\frac{1-i}{1+i} = -i,\ \frac{1+i}{1-i} = i$

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$= f(-i) - f(i)$

$= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000} - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}$

$= (-i)^{1000} - (i)^{1000}$

$= 1 - 1$

$= 0$

5. $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$을 간단히 하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\\
&=\{1+(-i)+(-1)+i\}+\{1+(-i)+(-1)+i\}+1\\
&=1
\end{aligned}
$$

6. 다음을 계산하여라.

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** i

해설

$$\begin{aligned} &1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006} \\ &= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \cdots \\ &\quad \cdots + (i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}) + (i^{2005} + i^{2006}) \\ &= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) \\ &\quad + \cdots + (i - 1 - i + 1) + (i - 1) \\ &= i \end{aligned}$$

7. 복소수 $w=2-i$ 에 대하여 $\dfrac{w}{w+1}+\dfrac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$ 의 값은? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{7}{5}$ ③ 1 ④ $\dfrac{7}{10}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

해설

$\overline{w}=2+i$

$$\frac{w}{w+1}+\frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$$

$$=\frac{2-i}{3-i}+\frac{2+i}{3+i}$$

$$=\frac{(2-i)(3+i)+(2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$=\frac{14}{10}$$

$$=\frac{7}{5}$$

해설

$\omega+\overline{\omega}=4, \omega\overline{\omega}=5$

$$\frac{w}{w+1}+\frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}=\frac{2\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}+1}$$

$$=\frac{10+4}{5+4+1}$$

$$=\frac{7}{5}$$

8. 등식 $x(3+4i)+\overline{y(1+i)}=5+2i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x(3+4i)+\overline{y(1+i)}$

$=3x+4xi+y-yi$

$=(3x+y)+(4x-y)i$

$=5+2i$

$\therefore\ 3x+y=5,\ 4x-y=2$

$x=1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=3$

9. $z = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때 $z^5 + 3z$ 를 간단히 하면?

① $1+\sqrt{3}i$ ② $2+\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$

④ $2+2\sqrt{3}i$ ⑤ $3+3\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 에서 $z^2 - z + 1 = 0 \quad \therefore \; z^3 = -1$

$z^5 + 3z = -z^2 + 3z = -(z-1) + 3z = 1 + 2z$

$z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이므로 $1 + 2z = 2 + \sqrt{3}i$

10. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$$
$$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$$
$$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$$
$$=a+bi$$
따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

11. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10　　② -8　　③ -6　　④ -4　　⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$

$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$

$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$

만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.

$a \neq 2, \therefore\ a=-4$

12. 등식 $(x^2-3x+1)+(y^2-1)i=-1+3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2-3x+1=-1 \quad y^2-1=3$

$x=1$ 또는 $2y=\pm 2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$)=\ 4$

13. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n=1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n=4$

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$ 에서

$n=1$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1=-i$

$n=2$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=(-i)^2=-1$

$n=3$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=(-i)^3=i$

$n=4$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4=(-i)^4=1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

14. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$$
$$= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta)$$
$$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$$
$$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$$
$$= (1 + i)(1 - i)$$
$$= 2$$

15. $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+\cdots-100i^{100}=a+bi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -100 ② -50 ③ 0 ④ 25 ⑤ 50

해설

준식$=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots$

$=\{(1+5+9+\cdots+97)-(3+7+\cdots+99)\}i$

$\quad+\{(2+6+\cdots+98)-(4+8+\cdots+100)\}$

$=(1225-1275)i+(1250-1300)=-50-50i$ 따라서 $a=-50$, $b=-50$ 이므로 $a+b=-100$