1. a, b는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$이 $x^2 - x - 1$로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$ax^3 + bx^2 + 1$

$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$

$= ax^3 - (1 + a)x^2 + (1 - a)x + 1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1 + a) = b, 1 - a = 0$

$\therefore \quad a = 1, b = -2$

2. 직선 $y = ax + 1$이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 5$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 3x + 5$의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < -7$ 또는 $a > 1$　　② $-1 < a < 7$

③ $a < 7$　　④ $-7 < a < 1$

⑤ $1 < a < 7$

해설

$ax + 1 = x^2 - 3x + 5$에서 $x^2 - (a+3)x + 4 = 0$

(판별식)$=(a+3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0$

$a < -7$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉠

$ax + 1 = x^2 + 3x + 5$에서 $x^2 - (a-3)x + 4 = 0$

(판별식)$=(a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$

$\therefore -1 < a < 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 상수 a의 값의 범위는 $1 < a < 7$

3. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x-y)^2 + |x+y-2| = 0$
이 때, $(x-y)^2 \geq 0,\ |x+y-2| \geq 0$이므로
㉠이 성립하려면 $x - y = 0,\ x + y - 2 = 0$이어야 한다.
두 식을 연립하여 풀면 $x = 1,\ y = 1$
$\therefore\ xy = 1$

4. 부등식 $|x|+|x-2| \le 3$을 만족하는 x의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 할 때, $m+M$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

ⅰ) $x<0$일 때 $-2x+2 \le 3$, $x \ge -\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \le x < 0$

ⅱ) $0 \le x < 2$일 때 $2 \le 3$　$\therefore 0 \le x < 2$

ⅲ) $x \ge 2$일 때 $2x-2 \le 3$, $x \le \frac{5}{2}$　$\therefore 2 \le x \le \frac{5}{2}$

ⅰ) 또는 ⅱ) 또는 ⅲ)을 만족하는 범위를 구하면

$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$　$\therefore m+M=2$

5. 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$ ② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$
③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$ ④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$
⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

해설

$(x-2a)^2+y^2=4a^2 \cdots\cdots$ ㉠
$y=x+2 \cdots\cdots$ ㉡
에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2x^2+4(1-a)x+4=0$
$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$
㉠, ㉡이 만나지 않으려면
$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$
$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$
(다른해설) 원의 중심 $(2a, 0)$ 에서
직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면
$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a+1|$
원과 직선이 만나지 않으려면
$\sqrt{2}|a+1|=|2a|$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-2a-1<0 \quad \therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

6. 복소수 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$
$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=\left(\dfrac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$=(-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$

$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$

해설

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$

$\rightarrow 4z^2+4z+4=0$

$\rightarrow z^2+z+1=0$

$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\rightarrow z^3-1=0$

$\rightarrow z^3=1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=10z^4+12z^3+10z^2$

$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$=0+2$

$=2$

7. $y = 0$, $y = (k-2)x^2 - 6(k-1)x + 9k + 1$ 을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$ 가 2개일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$y = (k-2)x^2 - 6(k-1)x + 9k + 1$ 의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2 - 6(k-1)x + 9k + 1 = 0$ 은 이차방정식이어야 하므로 $k - 2 \neq 0$

$\therefore k \neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4} = \{3(k-1)\}^2 - (k-2)(9k+1) > 0$

$9(k^2 - 2k + 1) - (9k^2 - 17k - 2) > 0$

$-k + 11 > 0$

$\therefore k < 11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k < 11,\ k \neq 2$

따라서, 정수 k 의 최댓값은 10 이다.

8. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은 ?

① 2　　② -2　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $-\frac{1}{2}$　　⑤ 0

해설

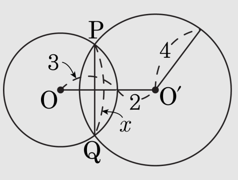
직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$
두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면
$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$
$4x - ky + 10 = 0 \cdots ①$
그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$은 일치해야 하므로
$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$
$\therefore\ k = 2,\ m = -\frac{5}{2}$
$\therefore\ m + k = -\frac{1}{2}$

9. 두 원 O 와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

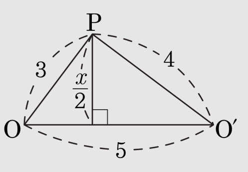
① 4 ② 4.2 ③ 4.4 ④ 4.6 ⑤ 4.8

해설

$\overline{PQ}$를 x라 하면,



확대해보면 두 교점을 P, Q 라 하면,



삼각형의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{x}{2}$

$\therefore\ x = \frac{24}{5} = 4.8$

10. $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$에 대하여 $A + 2B$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 100　⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$을 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉡

(ii) ㉠+㉡ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$

$\therefore\ A = 1$

㉠ − ㉡하면

$0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$

$a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore\ B = 0$

$\therefore\ A + 2B = 1$

11. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면 ? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $(z+1)^2$
>
> ㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z$
>
> ㉢ $\left(z^2+z+1\right)(\bar{z}+1)+\left((\bar{z})^2+\bar{z}+1\right)(z+1)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$
(허수)

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$ (실수)
($\because z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)=Z$ 라 하면
(준식)$=Z+\bar{Z}$ 이므로 실수

따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.