1. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

2. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 13 개 ⑤ 64 개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$
$= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4$
$= (4a^2-9b^2)^{12}$
$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$ 의 항의 개수는 13 개이다.

3. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x=0$을 대입하면, $-2=2a \quad \therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면, $-3=-b \quad \therefore\ b=3$
$\therefore\ 2ab=-6$

4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$
$\therefore\ k = 6$

5. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$
② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$
④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

6. $z=\dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 z^2-2z+3 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ -1

해설

$z=\dfrac{2}{1+i}=1-i$

$z^2-2z+3=(1-i)^2-2(1-i)+3=1$

7. 방정식 $|x-1| = 2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

ⅰ) $x \geq 1$ 일 때

$|x-1| = x-1$ 이므로, $x-1=2$

$\therefore x=3$

ⅱ) $x < 1$ 일 때

$|x-1| = -x+1$ 이므로, $-x+1=2$

$\therefore x=-1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ) 에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

8. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$　② $x = \sqrt{2}$　③ $x = 0$
④ $x = 4 - \sqrt{2}i$　⑤ $x = 6$

해설
$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$
$\therefore\ x = \sqrt{2}$

9. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2+2x+1)+2=0,\quad (x+1)^2=-2$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a-b=3$

10. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

11. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

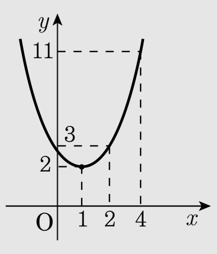
해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

12. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설



$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 점$(1,2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로
(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은
$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$
$\therefore\ m = 3$
(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$
$\therefore\ M = 11$
$\therefore\ M + m = 14$

13. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ② $-1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

14. 연립 방정식 $\begin{cases} x-y=5 \\ y+z=5 \\ z-x=2 \end{cases}$ 에서 $x+y+z$를 구하면?

① 9　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 5

해설

세 다항식을 더하면, $2z=12$, $z=6$
$y+6=5$, $y=-1$
$x+1=5$, $x=4$
$\therefore\ x+y+z=4-1+6=9$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5$ $\cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3$ $\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$
$\therefore$ $ab=2$

16. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 5이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x-1$

해설

$f(-1)=-3,\ f(3)=5$

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$-a+b=-3,\ 3a+b=5$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ ax+b=2x-1$

17. 두 곡선 $y = x^2$과 $y = -x^2 + 2x - 5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면
$y' = 2x$이므로 $y'_{x=t} = 2t$는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots$ ㉠
㉠이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$에도 접하므로
$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
$x^2 + 2(t - 1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots$ ㉡
㉡의 판별식 $\dfrac{D}{4} = 0$이므로
$(t - 1)^2 - (5 - t^2) = 0$에서
$(t + 1)(t - 2) = 0 \qquad \therefore\ t = -1,\ 2$
㉠에서
$t = -1$일 때, $y = -2x - 1$
$t = 2$일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

18. $x^2+2y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$

이때, y는 실수이므로 $2y^2=4-x^2 \geq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

$4x+2y^2=4x+4-x^2=-(x-2)^2+8$

$(-2 \leq x \leq 2)$

따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $m=-8$이고,

$x=2$일 때, 최댓값 $M=8$이므로 $M+m=0$

19. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2 \geq 0$

$(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

20. 너비가 $40\,\mathrm{cm}$ 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

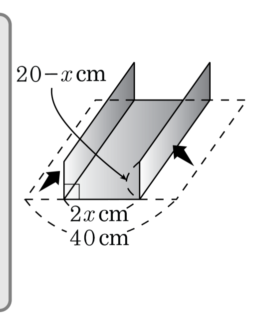
해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.

단면의 넓이는

$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$

$\therefore\ x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



21. 삼차방정식 $x^3+px^2+qx-2=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 p, q의 값에 대하여 $p+q$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x=1+i$에서 $(x-1)^2=i^2$, $x^2-2x+2=0$
(또는, 다른 한 근이 $1-i$이므로 근과 계수의 관계에서 이차방정식 도출)
$\therefore (x-1)(x^2-2x+2)=0$, $x^3-3x^2+4x-2=0$
$\therefore\ p=-3,\ q=4$
$\therefore\ p+q=1$

해설

[별해1] $x=1+i$을 준식에 직접대입하고
허수부와 실수부로 정리하여 복소수의 상등을 이용한다.
[별해2] 세근의 곱이 2이므로 세 근은 $1+i,\ 1-i,\ 1$이다.
즉 근과 계수의 관계에서 $p,\ q$의 값을 구한다.

22. 삼차방정식 $2x^3+px^2+qx-5=0$ 의 한 근이 $1-2i$ 일 때 $p+q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

① 7　　② -7　　③ 6　　④ -6　　⑤ 11

해설

한 근이 $1-2i$이므로 다른 두 근을 $1+2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱:

$(1-2i)(1+2i)\alpha = \frac{5}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{1}{2}$

세 근의 합: $-\frac{p}{2} = (1-2i)+(1+2i)+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore\ p=-5$

두근끼리 곱의 합 : $\frac{q}{2} = (1-2i)(1+2i)+(1-2i+1+2i)\cdot\frac{1}{2} = 6$

$\therefore\ q=12$

$\therefore\ p+q=7$

해설

한 근이 $1-2i$ 이므로 다른 한 근은 $1+2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2-2x+5=0$

나머지 일차식을 $2x+a$ 라고 하면

$2x^3+px^2+qx-5=(2x+a)(x^2-2x+5)$ 에서

$a=-1$ 이므로 대입하여 정리하면

$p=-5,\ q=12$

$\therefore\ p+q=7$

23. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180 ② -180 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설
$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에
$(x+1)$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

24. $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3y+5z=21 \\ 5z+2x=17 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ 일 때, 곱 $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{cases} 2x+3y=8 & \cdots ㉠ \\ 3y+5z=21 & \cdots ㉡ \\ 5z+2x=17 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(2x+3y+5z)=46$

$2x+3y+5z=23$

㉠ 식에서 $5z=15, z=3$, $y=2$, $x=1$

$\alpha\beta\gamma=1\cdot2\cdot3=6$

25. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha,\ y = \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy + 2x - 3y = 10,\ xy + 2x - 3y - 6 = 4,$

$(x-3)(y+2) = 4$

$y + 2 \geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x - 3 = 1,\ y + 2 = 4$

$\therefore\ x = 4,\ y = 2$