1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$ ② $1 < k < 3$

③ $k < 3$ ④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

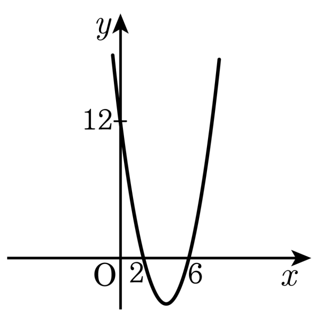
이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0,\ (k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. 다음은 이차함수 $y=(x-2)(x-6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차방정식 $(x-2)(x-6)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=6$
따라서 $A(2,\ 0)$, $B(6,\ 0)$ 이므로 $\overline{AB}=4$

3. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

4. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \ (0 \leq x \leq 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 −4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x-m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$

$x = 4$ 에서 최댓값 5 , $x = 1$ 에서 최솟값 −4

6. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x\ (1 \leq x \leq 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 −5

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$

꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$ 에서 최댓값 4

$x = 5$ 에서 최솟값 −5

7. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$　② $-1 < k < 8$　③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$　⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

8. x 에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+5k^2-5k+7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x=k,\ y=k^2+k+2$
② $x=k,\ y=k^2-3k+4$
③ $x=2k,\ y=k^2+4k+1$
④ $x=2k,\ y=k^2-5k+7$
⑤ $x=3k,\ y=2k^2-3k+6$

해설

$y=x^2-4kx+5k^2-5k+7$
$=(x-2k)^2+k^2-5k+7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x=2k$ 일 때
최솟값 k^2-5k+7 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
$x=2k,\ y=k^2-5k+7$

9. 함수 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$ 이므로
분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.
$\therefore$ $x = 1$ 일 때 최댓값 $\dfrac{6}{3} = 2$

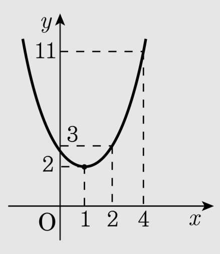
10. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

11. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2 \le x \le 2)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

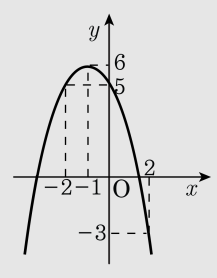
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$

점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$

따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며

최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.

$\therefore\ M+m=6-3=3$

12. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

13. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

14. 다음 식은 평면 위에 있는 어떤 그래프의 방정식이다. 이 그래프가 x 축에 접하도록 실수 a, b 의 값에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

$$y+(x+y)x+(a-1)x-b^2=0$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

접점의 x 좌표는 $y=0$ 일 때, 얻어지는 방정식
$x^2+(a-1)x-b^2=0$ 의 중근이다.
$\therefore\ D=(a-1)^2+4b^2=0$
a, b 는 실수이므로 $a=1$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

15. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ 일 때 $x^2-y^2+z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}=t$ 라 하면

$x=2t-1$, $y=5t+3$, $z=3t-2$ 이므로

$x^2-y^2+z^2=(2t-1)^2-(5t+3)^2+(3t-2)^2=-12t^2-46t-4$

$\cdots$ ㉠

$x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ 이므로

$t\geq \frac{1}{2}$, $t\geq -\frac{3}{5}$, $t\geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t\geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2-46\cdot\frac{2}{3}-4=-40$

16. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+1=0$의 두 실근 α,β에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 a의 값은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $-\frac{1}{4}$　　④ 0　　⑤ 3

해설

$x^2+(a+1)x+a+1=0$이 실근을 가지므로

$D=(a+1)^2-4(a+1)\ge 0,\ \ (a+1)(a-3)\ge 0$

$\therefore a\le -1$ 또는 $a\ge 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+1),\ \alpha\beta=a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta \\ &= (a+1)^2-(a+1) \\ &= a^2+a=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이때, $a\le -1$ 또는 $a\ge 3$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ 는 $a=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

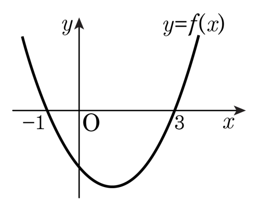
17. x, y가 실수일 때, $-x^2-y^2-4x+6y-12$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-x^2-y^2-4x+6y-12=-(x+2)^2-(y-3)^2+1$
이 때, x, y가 실수이므로
$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$
$\therefore -x^2-y^2-4x+6y-12 \leq 1$
따라서 $x=-2,\ y=3$일 때
주어진 식의 최댓값은 1이다.

18. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?

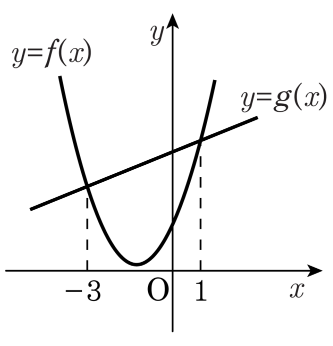


① −1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -1, 3 이므로
$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a>0)$ 으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이므로
$f(2x-1) = 0$ 에서
$4ax(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2 이다.

19. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a-c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x+3)(x-1) = 0$ 과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a-c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x+1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

20. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.