1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$　　② $1 < k < 3$

③ $k < 3$　　④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$
$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠
또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$
$9(k^2-2k+1)-(9k^2-17k-2)>0$
$-k+11>0$
$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k<11$, $k\neq 2$
따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

3. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$　② $k > 3,\ k < -1$　③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$　⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

4. 이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$의 그래프가 직선 $y = x + 1$의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 m의 값의 범위는?

① $m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$
② $m < -1$ 또는 $m > \frac{1}{3}$
③ $m < \frac{1}{3}$ 또는 $m > 2$
④ $m < \frac{2}{3}$ 또는 $m > 2$
⑤ $m < -2$ 또는 $m > 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$의 그래프가 직선 $y = x + 1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 x에 대하여

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$이 항상 성립하여야 한다.

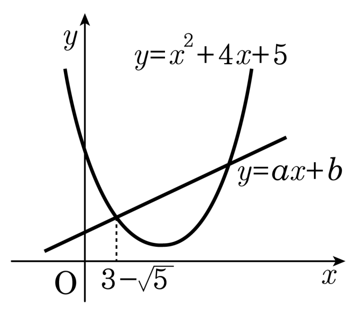
따라서, 이차방정식 $x^2 + (m-2)x + m^2$의 판별식 $\mathrm{D} < 0$이어야 한다.

$\mathrm{D} = (\mathrm{m}-2)^2 - 4\mathrm{m}^2 < 0$

$(m+2)(3m-2) > 0$

$\therefore m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$

5. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠
이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$
$\therefore a + b = 3$

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

8. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

9. $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + 5$
이 때, $x,\ y$ 가 실수이므로
$(x-1)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$
$\therefore\ 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$
따라서 구하는 최솟값은 5 이다.

10. 실수 x, y가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$　② $2\sqrt{2} + 1$　③ $2\sqrt{2} + 2$
④ $\sqrt{2} + 4$　⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을
(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$에서 x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore\ -2 \leq y \leq 2$
따라서, y의 최댓값은 2이다.
(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$에서 y가 실수이므로
$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0,\ x^2 \leq 8$
$\therefore\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.
(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

11. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m, 가장 큰 정수를 M이라 할 때, $m+M$의 값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}=y$라 놓고,
양변에 x^2+2x+3을 곱하면
$2x^2-4x+1=y(x^2+2x+3)$
$(y-2)x^2+2(y+2)x+3y-1=0$
x가 실수이므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(y+2)^2-(y-2)(3y-1)\geq 0$
$2y^2-11y-2\leq 0$
$\therefore \dfrac{11-\sqrt{137}}{4}\leq y\leq \dfrac{11+\sqrt{137}}{4}$
$11<\sqrt{137}<12$이므로
$-0.\times\times\times\leq y\leq 5.\times\times\times$
따라서 $m=0, M=5$이므로 $m+M=5$

12. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

13. x 가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}=k$ 라 하면

$x^2-x+3=k\left(x^2+x+1\right)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-3=0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때, $x=1$

따라서, $k=1$ 은 성립한다.

(ii) $k-1\neq 0$, 즉 $k\neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D\geq 0$ 이다.

$D=(k+1)^2-4(k-1)(k-3)\geq 0$

$3k^2-18k+11\leq 0$

$\therefore \dfrac{9-4\sqrt{3}}{3}\leq k\leq \dfrac{9+4\sqrt{3}}{3}$

$0.\times\times\times\leq k\leq 5.\times\times\times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이다.

(i), (ii) 에서 구하는 정수 k 의 개수는 5 개다.

14. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : 100 cm^2

해설

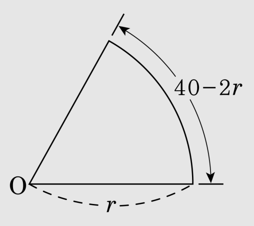
부채꼴의 반지름의 길이를 $r\mathrm{cm}$ 라 하면

$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$

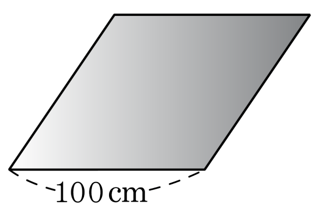
$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 $100\mathrm{m}^2$ 이다.

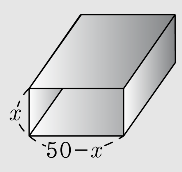


15. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



① $695\,\mathrm{cm}^2$ ② $710\,\mathrm{cm}^2$ ③ $625\,\mathrm{cm}^2$
④ $525\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $410\,\mathrm{cm}^2$

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으르 구부리면 단면적 S 는

$S = x(50-x) = -x^2 + 50x$
$= -(x-25)^2 + 625$

$\therefore\ x = 25$ 일 때, S 의 최댓값은 $625\,\mathrm{cm}^2$