

1. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $2x + 4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$\begin{aligned} 2f(x) - g(x) &= (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ g(x) &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) \text{라 둘 수 있다.} \\ \text{따라서 } 2f(x) &= g(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)\{A(x) + B(x)\} + 2R(x) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = (x^2 + 1)\frac{1}{2}\{A(x) + B(x)\} + R(x)$$

$$\therefore R(x) = 2x + 4 \text{이고 } R(10) = 24$$

2. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

3. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$

주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로

$x^2 + y^2 = 4$

4. 복소수들 사이의 연산 $*$ 가 다음과 같다고 하자.

$$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$$

이 때, $(1 + 2i) * z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $-1 + i$

④ $-1 - i$

⑤ i

해설

$z = a + bi$ 라 하면

$$(1 + 2i) * z$$

$$= (1 + 2i) + (a + bi) + (1 + 2i)(a + bi)i$$

$$= (-a - b + 1) + (a - b + 2)i = 1$$

$$-a - b + 1 = 1, \quad a - b + 2 = 0$$

$$a = -1, \quad b = 1$$

$$\therefore z = -1 + i$$

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단,
 $i = \sqrt{-1}$)

① 2

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ ($m \geq 0$)

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

6. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99} + \beta^{99}$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을
이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면
 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \beta^2 - \beta + 1 = 0$
두 식에 각각 $\alpha + 1, \beta + 1$ 를 곱하면
 $(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0, (\beta + 1)(\beta^2 - \beta + 1) = 0$
 $\therefore \alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$
 $\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$

해설

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$ 이므로
 α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면
 $x^2 - x + 1 = 0$
 $\therefore (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^3 + 1) = 0$
 $\alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$
 $\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$

7. 이차방정식 $x^2 + 8x + 2k = 0$ 이 허근을 가지도록 하는 정수 k 의 값의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$$\frac{D'}{4} < 0 \text{ 이어야 하므로,}$$

$$16 - 2k < 0, \quad 2k > 16, \quad \therefore k > 8$$

$\therefore$ 정수 k 의 최솟값은 9

8. 이차방정식 $5x^2 - 6x + a - 5 = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a 의 최솟값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$D' = 9 - 5(a - 5) = -5a + 34 < 0$$

$$\therefore a > \frac{34}{5}$$

9. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $k < -2, k > 2$ ② $k < -4, k > 4$ ③ $k < -1, k > 1$
④ $k < 0, k > 4$ ⑤ $k < 0, k > 2$

해설

판별식 D 가 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = k^2 - 4 \cdot 4 > 0$$

$$(k - 4)(k + 4) > 0$$

$$\therefore k < -4, k > 4$$

10. 이차함수 $y = x^2 + kx + k$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 범위는?

① $k < 1$ 또는 $k > 5$

② $1 < k < 5$

③ $1 \leq k \leq 5$

④ $k < -5$ 또는 $k > -1$

⑤ $1 < k < 3$

해설

이차방정식 $x^2 + kx + k = x + 1$, 즉 $x^2 + (k-1)x + k-1 = 0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D = (k-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k-1) > 0$$

$$k^2 - 6k + 5 > 0, \quad (k-1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$$

11. 사차방정식 $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은?

- ① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$$2x^4 + 7x^2 - 4 = 0 \text{에서 } x^2 = t \text{라 하면}$$

$$2t^2 + 7t - 4 = 0, (2t - 1)(t + 4) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -4$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

이 때, α, β 는 허근이므로

$$\alpha = 2i, \beta = -2i \text{ 또는 } \alpha = -2i, \beta = 2i$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = -1$$

12. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

13. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 \leq k$

② $1 \leq k < 2$

③ $k > 0$

④ $-1 < k \leq \frac{1}{4}$

⑤ $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$(x+1)(x^2 + x + k) = 0$$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2 + x + k = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$D = 1^2 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

14. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$ 의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$ 에서 $x = 1, x = -1$ 일 때 성립하므로

인수정리와 조립제법을 이용하면

(좌변) $= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + a) = 0$

따라서 모두 실근이 되려면

$x^2 + 2x + a = 0$ 의 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

15. 세 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 6, x^3 + y^3 + z^3 = 8$ 을 만족할 때, $-x - y + z$ 의 값은?(단, $x \leq y \leq z$)

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$x + y + z = 2 \cdots \textcircled{㉠}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 6 \cdots \textcircled{㉡}$
 $x^3 + y^3 + z^3 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $xy + yz + zx = -1 \cdots \textcircled{㉣}$
 $x^3 + y^3 + z^3 =$
 $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz = 8$
 $\therefore xyz = -2 \cdots \textcircled{㉤}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 이용하여
 x, y, z 를 세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
 $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0(t - 2)(t + 1)(t - 1) = 0,$
 $t = -1, 1, 2$
 $x \leq y \leq z$ 이므로 $x = -1, y = 1, z = 2$
 $\therefore -x - y + z = 2$

16. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 α , 방정식 $x^3 = 2$ 의 한 허근을 β 라고 할 때, $x^3 - 2 = (x - \beta)(x - \alpha\beta)p(x)$ 를 만족시키는 다항식 $p(x)$ 에 대하여 $p(\alpha^5\beta)$ 의 값은?

- ① α ② $\alpha\beta$ ③ α^2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\beta^3 &= 2, \quad (\alpha\beta)^3 = \alpha^3\beta^3 = 2, \\ (\alpha^2\beta)^3 &= (\alpha^3)^2 \cdot \beta^3 = 2 \text{이므로} \\ \text{방정식 } x^3 &= 2 \text{의 근은 } \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta \text{이다.} \\ \text{따라서 } x^3 - 2 &= (x - \beta)(x - \alpha\beta)(x - \alpha^2\beta) \\ \therefore p(x) &= x - \alpha^2\beta \\ \therefore p(\alpha^5\beta) &= \alpha^5\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^3 \cdot \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= 0\end{aligned}$$

17. 부등식 $x^2 - 4|x| + 3 < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 무수히 많다.

해설

$$x^2 - 4|x| + 3 < 0 \text{에서 } |x|^2 - 4|x| + 3 < 0$$

$$(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$$

$$1 < |x| < 3$$

따라서, 정수 $x = 2, -2$

18. 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하면?

$|x^2 - 2x| = y - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$ $y \leq x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y = |x^2 - 2x| + 1$ 이므로
㉡에 대입하면 $|x^2 - 2x| \leq x$
(i) $x^2 - 2x \geq 0$ ($x \leq 0, x \geq 2$) 일 때
 $x^2 - 2x \leq x$
 $\therefore x(x - 3) \leq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 3$
조건과 공통범위를 구하면 $x = 0, 2 \leq x \leq 3$
(ii) $x^2 - 2x < 0$ ($0 < x < 2$) 일 때
 $-(x^2 - 2x) \leq x$
 $\therefore x(x - 1) \geq 0$
 $\therefore x \leq 0, x \geq 1$
조건과 공통 범위를 구하면 $1 \leq x < 2$
(i), (ii) 에서 정수 x 를 구하면 $x = 0, 1, 2, 3$
 x 의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y = 1, 2, 1, 4$
구하는 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4)$
따라서 구하는 개수는 4 개다.

19. 이차부등식 $x(x+1) < ax(x+1) - 1$ 을 만족하는 해가 없을 때, 상수 a 값의 범위는?

① $-2 \leq a < 1$

② $-2 < a < 1$

③ $-3 \leq a < 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $a < -2$ 또는 $a > 1$

해설

$$x^2 + x < ax^2 + ax - 1 \text{ 에서}$$

$$(a-1)x^2 + (a-1)x - 1 > 0 \text{ 가 해가 없으려면}$$

$$a-1 < 0, D \leq 0$$

$$D = (a-1)^2 + 4(a-1) \leq 0$$

$$(a-1)(a+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 1$$

$$a-1 < 0 \text{ 에서 } a \neq 1$$

$$\therefore -3 \leq a < 1$$

20. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a < m < b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3 > 2$
 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 1 > 0$ 이므로
 $m \neq -1$, $m > -1$ 이고, $D < 0$ 이다.
 $\frac{D}{4} = m^2 - 3m < 0 \quad \therefore 0 < m < 3$
 $\therefore a = 0, b = 3$
 $\therefore a + b = 3$

21. $\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \leq \beta$ 일 때,
 $\alpha + \beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 3x \leq 0$ 에서
 $x(x - 3) \leq 0$ 이므로
 $0 \leq x \leq 3 \cdots (가)$
 $x^2 - 5x + 4 < 0$ 에서
 $(x - 1)(x - 4) < 0$ 이므로
 $1 < x < 4 \cdots (나)$
 $(가), (나)$ 에 의해
 $1 < x \leq 3$ 이므로
 $\alpha = 1, \beta = 3$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

22. 연립부등식 $\begin{cases} |x-1| < 3 & \dots \textcircled{㉠} \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq 1$

② $x < -2$ 또는 $x \leq 1$

③ $-2 < x \leq -1$

④ $-1 < x \leq 2$

⑤ $-2 < x \leq 3$

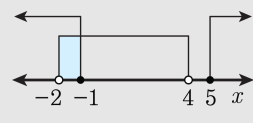
해설

㉠ : $|x-1| < 3$

$\rightarrow -3 < x-1 < 3, -2 < x < 4$

㉡ : $(x-5)(x+1) \geq 0$

$\rightarrow x \leq -1, x \geq 5$



$\therefore -2 < x \leq -1$