

1. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ -2 ④ 3 ⑤ -4

해설

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = 1 \\xy &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{1 - (-3)}{4} = 1 \\\therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3 + y^3}{xy} \\&= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{xy} \\&= -2\end{aligned}$$

2. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$

② $-2\sqrt{2}i$

③ $\sqrt{2}i$

④ $-\sqrt{2}i$

⑤ $2i$

해설

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \\x - y &= 2\sqrt{2}i, xy = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 3 \\x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i) \\&= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\&= 2\sqrt{2}i\end{aligned}$$

3. $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

- ① i ② $-i$ ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1-i)^2 + (1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(1-2i+i^2) + (1+2i+i^2)}{1-i^2} \\ &= \frac{2+2i^2}{1-(-1)} = \frac{2-2}{2} = 0\end{aligned}$$

4. $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \dots + w^{100}$ 의 값은?

- ① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서}$$

$$w^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} \\ = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 - 3i^2}{4} = 1$$

$$1 + w + w^2 = 1 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots + w^{100} \\ &= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \dots \\ &\quad + w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w) \\ &= 1 + w = 1 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

5. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10} + (\beta+1)^{10}$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을
 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\therefore \alpha + 1 = -\alpha^2, \beta + 1 = -\beta^2$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 각각 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 곱하면
 $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, (\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 1) = 0$
 $\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$
 $(\alpha + 1)^{10} + (\beta + 1)^{10}$
 $= (-\alpha^2)^{10} + (-\beta^2)^{10}$
 $= (\alpha^3)^6 \cdot \alpha^2 + (\beta^3)^6 \cdot \beta^2$
 $= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= -1 (\because \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1)$

해설

$\alpha + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$
 $\alpha + 1 = A, \beta + 1 = B$ 라 하면
 $A + B = 1, AB = 1$ 이므로 A, B 는
 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 이다.
 $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 0$
 $\therefore x^3 = -1, A^3 = B^3 = -1$
 (준식) $= A^{10} + B^{10} = (A^3)^3 \cdot A + (B^3)^3 \cdot B$
 $= -(A + B)$
 $= -1$

6. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 의 값은?

① $2 + \sqrt{3}i$

② $2 - \sqrt{3}i$

③ $3 + \sqrt{3}i$

④ $-3 + \sqrt{3}i$

⑤ $3 - \sqrt{3}i$

해설

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, 2x = 1 + \sqrt{3}i, 2x - 1 = \sqrt{3}i$$

$$4x^2 - 4x + 1 = -3$$

$$4x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누면

$$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$$

$$= (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 3) + 2x + 1$$

$$= 0 + 2x + 1$$

$$= 2 \times \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + 1$$

$$= 2 + \sqrt{3}i$$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이 허근을 가질 때,

실수 k 의 값의 범위는?

① $k < 0$

② $k > 0$

③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \leq 0$

⑤ $k \geq 0$

해설

$$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0 \text{ 이}$$

허근을 가져야 하므로

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$$

$$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$$

$$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$$

$$\therefore k > 0$$

8. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < 1$

② $-1 < m < 1$

③ $m < -1$ 또는 $m > 1$

④ $m > 1$

⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$$D/4 = 1 - m < 0$$

$$\therefore m > 1$$

9. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 5) + 3 = 0$ 이 허근을 가질 때, 정수 k 의 최댓값을 구하면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - kx^2 + 5x + 3 = 0$ 이 허근을 가지려면

$$D = 25 - 4 \times 3(1 - k) < 0$$

$$25 - 12 + 12k < 0 \quad \therefore 12k < -13$$

$$\therefore k < -\frac{13}{12} \text{이므로}$$

정수 k 의 최댓값은 -2

10. 4차방정식 $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ 을 $(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 = 0$ 꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

- ① $1 \pm \sqrt{3}i$ ② $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $-1 \pm \sqrt{3}i$
④ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & (x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 \\ &= x^4 + (2a - 4)x^2 - 4bx + a^2 - b^2 \end{aligned}$$

이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로

$$2 = 2a - 4, 4 = -4b, 8 = a^2 - b^2$$

$\therefore a = 3, b = -1$

따라서 주어진 4차방정식은 다음과 같이 변형하면,

$$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$$

$\therefore (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$

$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}i$ 또는 $x = -1 \pm i$

11. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t-4)(t-9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

12. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 = 0 \text{을 변형하면} \\x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0, \\(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0 \\(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0, \\x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0 \\ \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

13. 삼차방정식 $x^3 + ax + b = 0$ 의 한 근이 i 일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b 는 실수)

① $-i$ ② 0 ③ i ④ 1 ⑤ -1

해설

$x = i$ 를 대입하면 $(i)^3 + ai + b = 0$ $(a-1)i + b = 0$
 a, b 는 실수이므로 $a = 1, b = 0$
 $x^3 + x = 0, x(x^2 + 1) = 0, x = 0, i, -i$
 \therefore (나머지 두 근의 곱) = 0

14. x 에 관한 삼차방정식 $2x^3 + ax^2 - bx + 3 = 0$ 의 한 근이 1이고, $a + b + 1 = 0$ 일 때, 나머지 근을 모두 구하면?

① -3

② $-1, 2$

③ $-1, 3$

④ $-1, \frac{3}{2}$

⑤ $-\frac{1}{2}, 3$

해설

한 근이 1이므로 주어진 식에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2 + a - b + 3 = 0, a - b = -5$$

주어진 조건인 $a + b + 1 = 0$ 과 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 - x - 3) = 0$$

$$(x - 1)(2x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{3}{2}, -1$$

15. 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 p, q 의 값에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = 1+i$ 에서 $(x-1)^2 = i^2$, $x^2 - 2x + 2 = 0$
(또는, 다른 한 근이 $1-i$ 이므로 근과 계수의 관계에서 이차방정식 도출)
 $\therefore (x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0$, $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$
 $\therefore p = -3, q = 4$
 $\therefore p + q = 1$

해설

[별해1] $x = 1+i$ 을 준식에 직접대입하고
허수부와 실수부로 정리하여 복소수의 상등을 이용한다.
[별해2] 세근의 곱이 2이므로 세 근은 $1+i, 1-i, 1$ 이다.
즉 근과 계수의 관계에서 p, q 의 값을 구한다.

16. 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, r 라 할 때, $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$ 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근이
 α, β, r 이므로
 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$
양변에 $\sqrt{2}$ 를 대입하면
 $4\sqrt{2} - 6 + 6$
 $= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$
 $\therefore (\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$

17. $x^3 + ax + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}, \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$ 를 세 근으로 하는 삼차방정식은?

- ① $x^3 - ax^2 - 1 = 0$ ② $x^3 - ax^2 + 1 = 0$
 ③ $x^3 + ax^2 - 1 = 0$ ④ $x^3 + ax^2 + 1 = 0$
 ⑤ $x^3 + ax - 1 = 0$

해설

$x^3 + ax + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로
 근과 계수의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a, \alpha\beta\gamma = -1$$

$$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\text{같은 방법으로 } \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = a$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

따라서, 구하는 삼차방정식은

$$x^3 - ax^2 - 1 = 0 \text{ 이다.}$$

18. α, β, γ 가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$ 의 세 근일 때, $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2}$ 를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

- ① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$ ② $x^3 - ax - 3 = 0$
 ③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$ ④ $x^3 + ax + 3 = 0$
 ⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$$\begin{aligned}
 &x^3 - ax - 3 \\
 &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\
 &= 0 \text{에서} \\
 &\alpha + \beta + \gamma = 0, \\
 &\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a, \alpha\beta\gamma = 3 \\
 &\therefore \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}, \\
 &\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \\
 &\frac{\alpha + \gamma}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta} \\
 &\text{따라서, } \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2} \text{를} \\
 &\text{세 근으로 하는 방정식은} \\
 &\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\left(x + \frac{1}{\beta}\right)\left(x + \frac{1}{\gamma}\right) \\
 &= x^3 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 \\
 &+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \\
 &= x^3 + \left(-\frac{a}{3}\right)x^2 + \frac{1}{3} = 0 \\
 &\therefore 3x^3 - ax^2 + 1 = 0
 \end{aligned}$$

19. 부등식 $\left(x + \frac{1}{x}\right)(x^2 - |x| - 2) \leq 0$ 을 풀면?

- ① $0 < x \leq 1$ 또는 $x \leq -2$ ② $0 < x \leq 1$ 또는 $x \leq -1$
③ $0 < x \leq 2$ 또는 $x \leq -1$ ④ $0 < x \leq 2$ 또는 $x \leq -2$
⑤ $0 < x \leq 2$ 또는 $x \leq 0$

해설

① $x > 0$ 이면 $|x| = x$, $x + \frac{1}{x} > 0$ 이므로

$$x^2 - x - 2 \leq 0 \rightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore 0 < x \leq 2 \quad (\because x > 0)$$

② $x < 0$ 이면 $|x| = -x$, $x + \frac{1}{x} < 0$ 이므로

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \rightarrow (x-1)(x+2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2, x \geq 1$$

$$\therefore x \leq -2 \quad (\because x < 0)$$

$$\text{①, ②에서 } 0 < x \leq 2, x \leq -2$$

20. 부등식 $(|x-1|)(|x-3|) < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

- ① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$(|x-1|)(|x-3|) < 0$
 $1 < |x| < 3$ 에서 구간을 나누면
(i) $x \geq 0$ 일 때, $1 < x < 3$, 정수 : 2
(ii) $x < 0$ 일 때, $1 < -x < 3$,
 $-3 < x < -1$ 정수 : -2
 \therefore 정수의 개수 : 2개

21. 부등식 $x^2 - 3 < x + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은 ?

- ① -1 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2 - 3 < x + |2x + 1|$

(i) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$x^2 - 3 < x + 2x + 1, \quad x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x - 4)(x + 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 4$$

(ii) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$x^2 - 3 < x - (2x + 1), \quad x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x + 2)(x - 1) < 0$$

$$\therefore -2 < x < -\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $-2 < x < 4$

$$\therefore \alpha = -2, \beta = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2$$

22. 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 2ax + 1$ 의 값이 $x^2 + 2x - 1$ 의 값보다 크도록 하는 a 의 범위를 구하면?

- ① $1 < a < 3$ ② $1 \leq a < 3$ ③ $1 \leq a \leq 4$
④ $1 \leq a < 4$ ⑤ $1 < a < 4$

해설

$$\begin{aligned} ax^2 + 2ax + 1 &> x^2 + 2x - 1 \\ (a-1)x^2 + 2(a-1)x + 2 &> 0 \\ \text{i) } a = 1 &\text{ 항상 성립} \\ \text{ii) } a > 1 &\text{ 판별식 } D < 0 \text{에서} \\ \frac{D}{4} = (a-1)^2 - 2(a-1) &< 0 \\ (a-1)(a-3) < 0, & 1 < a < 3 \\ \text{i), ii)에서 } & 1 \leq a < 3 \end{aligned}$$

23. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되기 위한 a 의 정수값은 얼마인가?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되려면
판별식이 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a-5)^2 - 2(3a-19) < 0$$

$$a^2 - 10a + 25 - 6a + 38 < 0, a^2 - 16a + 63 < 0$$

$$(a-9)(a-7) < 0$$

$$\therefore 7 < a < 9$$

따라서 정수 a 의 값은 8이다.

24. x 에 대한 이차함수 $y = (a-3)x^2 - 2(a-3)x + 3$ 의 값이 모든 실수 x 에 대하여 항상 양이 되는 실수 a 의 값의 집합을 A라 하고, 항상 음이 되는 실수 a 의 값의 집합을 B라 할 때, $A \cup B$ 는?

- ① $\{a \mid a < 6\}$ ② $\{a \mid a \leq 6\}$ ③ $\{a \mid 3 < a < 6\}$
 ④ $\{a \mid 3 \leq a \leq 6\}$ ⑤ $\{a \mid a > 3\}$

해설

$y = (a-3)x^2 - 2(a-3)x + 3$ 이 이차함수이므로 $a \neq 3$ 이 때, 이차방정식 $(a-3)x^2 - 2(a-3)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D라 하자.

(i) 항상 양일 경우

모든 실수 x 에 대하여 항상 $y > 0$ 이라면 $a-3 > 0$, 즉 $a > 3$ 이고

$$\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 3(a-3) < 0$$

$$(a-3)(a-3-3) < 0, (a-3)(a-6) < 0$$

$$\therefore 3 < a < 6$$

$$\therefore A = \{a \mid 3 < a < 6\}$$

(ii) 항상 음일 경우

모든 실수 x 에 대하여 항상 $y < 0$ 이라면 $a-3 < 0$, 즉 $a < 3$ 이고

$$\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 3(a-3) < 0$$

$$(a-3)(a-3-3) < 0, (a-3)(a-6) < 0$$

$$\therefore 3 < a < 6$$

$$\therefore B = \emptyset$$

(i), (ii)에서 $A \cup B = \{a \mid 3 < a < 6\}$

25. 부등식 $x(x-1) < (x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는?

① $0 < x < 1$

② $x < 1$

③ $0 < x < 2$

④ $x > 2$

⑤ $1 < x < 3$

해설

i) $x(x-1) < (x-1)(x-2)$

$\Rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$

ii) $(x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$

$\Rightarrow 2x < 4$

$\Rightarrow x < 2$

i)과 ii)의 공통부분을 구하면

$\Rightarrow x < 1$

26. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x < 3 \end{cases}$ 의 해 중에서

정수인 것의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \iff (x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \dots \text{㉠}$$

$$2x^2 - 5x < 3 \iff 2x^2 - 5x - 3 < 0$$

$$\iff (2x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < 3 \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통 범위는 } -\frac{1}{2} < x < 3$$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3개다.

27. 다음 연립부등식을 만족하는 정수 x 의 개수는?

$$\begin{cases} |x+3| > 1 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + 4x - 3 \leq 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$$\begin{cases} |x+3| > 1 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + 4x - 3 \leq 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① : $x+3 > 1, x+3 < -1$

$x > -2$ 또는 $x < -4$

② : $x^2 + 4x - 3 = 0$ 에서

$x = -2 \pm \sqrt{4+3} = -2 \pm \sqrt{7}$

\therefore 부등식의 해는

$-2 - \sqrt{7} \leq x \leq -2 + \sqrt{7}$

①과 ②의 공통 범위는



$-2 - \sqrt{7} \leq x < -4, \quad -2 < x \leq -2 + \sqrt{7}$

정수 x : $-1, 0$ (2 개)