

1. 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $ax + b(a \neq 0)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① R

② aR

③ bR

④ $-\frac{b}{a}R$

⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R \quad \therefore R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$g(x) = xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지는

$$g\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}R$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x + 1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x + 1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

3. $\frac{2012^3 + 8}{2012 \times 2010 + 4}$ 의 값은?

- ① 2010 ② 2011 ③ 2012 ④ 2013 ⑤ 2014

해설

$a = 2012$ 라 치환하면,

$$\begin{aligned}\frac{2012^3 + 8}{2012 \times 2010 + 4} &= \frac{a^3 + 2^3}{a \times (a - 2) + 4} \\ &= \frac{(a + 2)(a^2 - 2a + 4)}{a^2 - 2a + 4} \\ &= 2012 + 2 \\ &= 2014\end{aligned}$$

4. $\frac{2004^3 - 2003^3 - 1}{2003 \times 2004}$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

2003 = x 라 두면 $2004 = x + 1$

$$\text{(준 식)} = \frac{(x+1)^3 - x^3 - 1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} = 3$$

5. 세 방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$, $x^2 + 2bx + ca = 0$, $x^2 + 2cx + ab = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a , b , c 는 실수)
- ① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.
② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.
③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.
④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.
⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - bc,$$

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - ca,$$

$$\frac{D_3}{4} = c^2 - ab \text{라 하면}$$

$$\frac{D_1}{4} + \frac{D_2}{4} + \frac{D_3}{4}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

6. a 가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x 에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 실근을 가진다.
② $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
③ $f(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 허근을 가진다.
④ $g(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
⑤ $g(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1,$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a-1$$

모든 실수 a 에 대하여

$$2a+1 > 2a-1,$$

즉, $D_1 > D_2$ 이므로 $D_1 < 0$ 이면 $D_2 < 0$

7. 유리수 a, b 에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$ 와 직선 $y = bx$ 가 만나는 두 교점을 P, Q라 한다. 점 P의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - a \\ y = bx \end{cases}$$

$bx = x^2 - a \therefore P, Q$ 의 x 좌표는 $x^2 - bx - a = 0$ 의 두 근이다.

점 P의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 이므로,

켈레근인 $2 - \sqrt{3}$ 은 점 Q의 x 좌표이다.

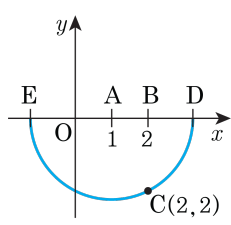
근과 계수와의 관계에 의해서

$$b = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$-a = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1 \therefore a = -1$$

$$\therefore a + b = (-1) + 4 = 3$$

8. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



- ① A ② B ③ C
 ④ D ⑤ O

해설

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5} \text{ 이다.}$$

∴ 점 D의 좌표는 $(1 + \sqrt{5}, 0)$,

점 E의 좌표는 $(1 - \sqrt{5}, 0)$ 이다.

그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지나므로

$x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.

여기서, a, b, c 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$

(∵ 켤레근) 또한 방정식의 근이 된다.

따라서, 그래프는 점 $D(1 + \sqrt{5}, 0)$ 을 지난다.

9. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

$$f(a) = (a - 1)^2 + 1$$

$\therefore a = 1$ 일 때, 최솟값 1

10. 이차함수 $y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로
 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y - 2m = -(x - m)^2 - 6(x - m) - 3$
즉, $y = -x^2 + 2(m - 3)x - m^2 + 8m - 3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
 $\frac{D}{4} = (m - 3)^2 - m^2 + 8m - 3 > 0$
 $2m + 6 > 0$
 $\therefore m > -3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

11. 함수 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$ 이므로

분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore x = 1$ 일 때 최댓값 $\frac{6}{3} = 2$

12. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ 에서
 $x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

13. 사차방정식 $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은?

- ① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$$2x^4 + 7x^2 - 4 = 0 \text{에서 } x^2 = t \text{라 하면}$$

$$2t^2 + 7t - 4 = 0, (2t - 1)(t + 4) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -4$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

이 때, α, β 는 허근이므로

$$\alpha = 2i, \beta = -2i \text{ 또는 } \alpha = -2i, \beta = 2i$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = -1$$

14. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{가장 작은 근 } a = -\sqrt{6}, \text{ 가장 큰 근 } b = \sqrt{6}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

15. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

- ① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$
③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$
④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면
다른 한 근은 $1-i$ 이다.
 $\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
 $(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$
 $\therefore$ ①이 조건에 맞다

16. α, β, γ 가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$ 의 세 근일 때, $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2}$ 를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

- ① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$
- ② $x^3 - ax - 3 = 0$
- ③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$
- ④ $x^3 + ax + 3 = 0$
- ⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - ax - 3 \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= 0 \text{에서} \\ & \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ & \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a, \alpha\beta\gamma = 3 \\ & \therefore \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}, \\ & \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \\ & \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta} \\ & \text{따라서, } \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2} \text{를} \\ & \text{세 근으로 하는 방정식은} \\ & \left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\left(x + \frac{1}{\beta}\right)\left(x + \frac{1}{\gamma}\right) \\ &= x^3 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 \\ &+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \\ &= x^3 + \left(-\frac{a}{3}\right)x^2 + \frac{1}{3} = 0 \\ & \therefore 3x^3 - ax^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

17. 부등식 $(a - b)x + (b - 2a) > 0$ 의 해가 $x > \frac{3}{2}$ 일 때, 부등식 $ax^2 + (a + 2b)x + (a + 3b) < 0$ 의 해를 구하면?

① $3 < x < 7$

② $-3 < x < 1$

③ $x < 2, x > 3$

④ $-1 < x < 2$

⑤ $x < -2, x > 4$

해설

$(a - b)x > 2a - b$ 의 해가 $x > \frac{3}{2}$ 이라면

$a - b > 0, \frac{2a - b}{a - b} = \frac{3}{2}$ 이어야 한다.

$\therefore a = -b, b < 0$

준 부등식 $-bx^2 + bx + 2b < 0$ 에서

$x^2 - x - 2 < 0, (x - 2)(x + 1) < 0$

$\therefore -1 < x < 2$

18. <보기> x 에 대한 부등식 $ax^2 + 4ax + 5a > 0$ 의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $a > 0$ 일 때 해는 모든 실수이다.
- ㉡ $a = 0$ 일 때 해는 $x = 0$ 뿐이다.
- ㉢ $a < 0$ 일 때 해는 없다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2 + 4ax + 5a > 0$ 에서
 $a(x^2 + 4x + 5) > 0$, $a\{(x + 2)^2 + 1\} > 0$
㉠ $a > 0$ 일 때 $(x + 2)^2 + 1 > 0 \therefore$ 모든 실수
㉡ $a = 0$ 일 때 $0 \cdot \{(x + 2)^2 + 1\} > 0 \therefore$ 해는 없다.
㉢ $a < 0$ 일 때 $(x + 2)^2 + 1 < 0 \therefore$ 해는 없다.

19. 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 이차부등식 $2[x]^2 - [x] - 6 < 0$ 의 해를 바르게 구한 것은?

- ① $-1 \leq x < 2$ ② $x \leq -1$ ③ $x \geq 1$
④ $x \leq 1$ ⑤ $x \leq -1, x \geq 2$

해설

$$2[x]^2 - [x] - 6 < 0 \text{에서}$$

$$([x] - 2)(2[x] + 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < [x] < 2$$

$$-1 \leq [x] < 2 \quad \therefore -1 \leq x < 2$$

20. 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다.
부등식 $2[x]^2 - [x] - 6 < 0$ 를 만족하는 x 의 범위를 바르게 구한 것은?

- ① $-1 \leq x < 2$ ② $x \leq -1$ ③ $x \geq 1$
④ $x \leq 1$ ⑤ $x \leq -1, x \geq 2$

해설

$2[x]^2 - [x] - 6 < 0$ 에서 좌변을 인수분해하면

$$(2[x] + 3)([x] - 2) < 0, -\frac{3}{2} < [x] < 2$$

이 때 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = -1, 0, 1$

$[x] = -1, 0, 1$ 이면 $-1 \leq x < 2$

$\therefore -1 \leq x < 2$

21. 모든 실수 x 에 대하여 $a(x^2 + 4) \geq 2x(a + 1)$ 이 성립할 때, 실수 a 의 조건은?

- ① $a < -\frac{1}{3}$, $a > 1$ ② $a \leq -\frac{1}{3}$ ③ $a \geq 1$
④ $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ ⑤ $a = 0, 1$

해설

주어진 식을 정리하면

$$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 4a \geq 0$$

$a = 0$ 일 때 $f(x) = -2x < 0$ 인 부분이 있고,

$a < 0$ 이면 $f(x) < 0$ 인 부분이 있다.

따라서 모든 x 에 대하여 성립하려면 $a > 0$

$$D/4 = (a+1)^2 - 4a^2 \leq 0$$

$$\therefore 3a^2 - 2a - 1 \geq 0$$

$$(3a+1)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \geq 1, a \leq -\frac{1}{3}$$

$a > 0$ 이므로 $a \geq 1$

22. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b 의 조건으로 바른 것은?
- ① $a \neq 20, b < 25$

② $a = 20, 0 < b < 25$

③ $a = 20, b > 25$

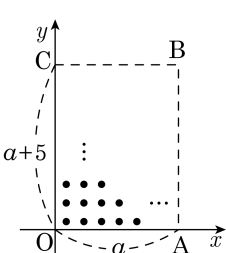
④ $0 < a < 20, b > 25$

⑤ $0 < a \leq 20, 0 \leq b \leq 25$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리한다
 $\Rightarrow x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$
항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다
 $D' = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$
 $\Rightarrow (20 - a)y + 25 - b < 0$
임의의 x, y 에 대해 성립하려면, $a = 20, b > 25$

23. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{OA} = a$, $\overline{OC} = a + 5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 직사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} (a - 1)(a + 4) &\leq 50 \\ a^2 + 3a - 54 &= (a + 9)(a - 6) \leq 0 \\ \therefore 0 < a &\leq 6 \end{aligned}$$

24. 둘레의 길이가 24 cm 인 직사각형의 넓이를 35 cm^2 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 cm ② 10 cm ③ 12 cm ④ 15 cm ⑤ 19 cm

해설

한 변의 길이가 a 이므로 다른 한 변의 길이는 $12 - a$ 이다.

$a(12 - a) \geq 35$ 에서 $(a - 5)(a - 7) \leq 0$

$\therefore 5 \leq a \leq 7$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 12 cm

25. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \end{cases}$ 을 풀면?

- ㉠ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$
㉡ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $2 \leq x \leq 3$
㉢ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$
㉣ $-2 \leq x \leq 1$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$
㉤ $-2 \leq x \leq 1$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

해설

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 & \cdots \textcircled{1} \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad (x-3)(x+2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$\textcircled{2} \quad (2x-3)(2x-1) \geq 0$$

$$x \geq \frac{3}{2}, \quad x \leq \frac{1}{2}$$

㉠과 ㉡의 공통범위 :

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 3$$

26. 부등식 $-x < x^2 < 2x + 1$ 의 해를 구하면?

① $x < -1$ 또는 $x > 0$

② $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

③ $0 < x < 1 + \sqrt{2}$

④ $-1 < x < 0$

⑤ $x < -\sqrt{2}$
또는 $x > 1 + \sqrt{2}$

해설

$$-x < x^2 < 2x + 1$$

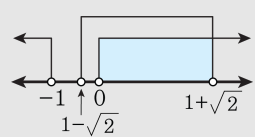
$$\begin{cases} -x < x^2 & \dots \textcircled{㉠} \\ x^2 < 2x + 1 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} \quad 0 < x^2 + x, \quad x(x + 1) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 0$$

$$\textcircled{㉡} \quad x^2 - 2x - 1 < 0,$$

$$\therefore 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$



두 부등식의 공통부분은

$$\therefore 0 < x < 1 + \sqrt{2}$$