1. 다음<보기>는 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + y + k = 0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

> ㉠ $k < \frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
> ㉡ $k = -\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
> ㉢ $k < 4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ㉣ $k = \frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
> ㉤ $k < \frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,
$(x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - k$ 이다.
$y = 0$ 을 대입 후 정리하면, $(x-1)^2 = 1 - k$
$\Rightarrow$ $k < 1$ 일 때 두 점에서 만난다.
㉣ $x = 0$ 를 대입 후 정리하면,
$(y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - k$
$\therefore$ $k = \frac{1}{4}$ 일 때 접한다.
㉤ 중심이 $y = x$ 위에 있지 않으므로 x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.
$\therefore$ (㉠, ㉣, ㉤) 가 참이다.

2. 두 점 $(-2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$

② $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 15 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

해설

i) 원의 중심은 두 점의 중점과 같다.

$\Rightarrow \left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) = (2,\ 3)$

ii) 반지름 길이는 중심과 한 점 사이의 거리와 같 다.

$\Rightarrow \sqrt{(2-6)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

3. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　　② $(2,\ 1)$　　③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$　　⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A = -4,\ \ B = -2\ ,\ C = -20$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

4. 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1),\ \mathrm{B}(3,\ 5)$ 를 지나는 원의 반지름은 ?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로
구하는 원의 방정식의 중심을 $(a,\ a)$,
반지름을 r 라고 하면,
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$
이것이 $\mathrm{A}(1,\ -1),\ \mathrm{B}(3,\ 5)$ 를 지나므로
$(1-a)^2 + (-1-a)^2 = r^2 \cdots$ ①
$(3-a)^2 + (5-a)^2 = r^2 \cdots$ ②
① − ② 을 하면, $16a - 32 = 0 \quad \therefore a = 2$
이것을 ① 에 대입하면, $r^2 = 10$
$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$
$\therefore$ 원의 반지름은 $\sqrt{10}$

5. 중심이 직선 $y = x + 3$ 위에 있고 점 $(6,\ 2)$를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 14 ⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a,\ a+3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2$
이 원이 $(6,\ 2)$를 지나므로
$(6-a)^2 + (a+1)^2 = (a+3)^2$ 에서
$(a-2)(a-14) = 0$
$\therefore a = 2,\ 14$
원의 반지름중 작은 것은 $a + 3 = 2 + 3 = 5$

6. x, y에 대한 이차방정식 $2x^2+py^2+qxy-6x+8y+2r=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p>1,\ q=0,\ r<6$
② $p=\frac{7}{9},\ q<0,\ r<\frac{2}{3}$
③ $p<9,\ q=0,\ r<\frac{19}{5}$
④ $p=2,\ q=0,\ r<\frac{25}{4}$
⑤ $p>1,\ q<\frac{8}{11},\ r<\frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면
x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로
$p=2,\ q=0$
따라서, 주어진 방정식은
$2x^2+2y^2-6x+8y+2r=0$
이 때, 양변을 2 로 나누면
$x^2+y^2-3x+4y+r=0$
이 식을 변형하면
$$\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+\left(y^2+4y+4\right)$$
$$=-r+\left(\frac{3}{2}\right)^2+4$$
$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=-r+\frac{25}{4}$$
이것이 원의 방정식이 되어야 하므로
$$-r+\frac{25}{4}>0$$
$$\therefore r<\frac{25}{4}$$

7. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a) = (-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

8. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$이 나타내는 자취의 최소 면적은
?

① 2π　② 3π　③ 4π　④ 5π　⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2=a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S=\pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$=\pi(a^2-2a+4)=\pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore\ a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

9. 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나고, x 축에 접하는 원은 2개가 있다. 이 때, 두 원의 반지름의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

x 축에 접하는 원의 방정식을 표현하면,
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나므로 각각 대입하면,
$(1-a)^2+(4-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉠
$(3-a)^2+(2-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면,
$a=1, b=2$ 또는 $a=9,\ b=10$
$\therefore$ 두 원의 반지름의 합은 $10+2=12$

10. 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, x축과 y축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이 때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 4

해설

x 축, y 축 동시에 접하는 원 :
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$
$(1,1)$ 을 지나므로, $(1-a)^2+(1-a)^2=a^2$
$\Rightarrow \quad a^2-4a+2=0$
두 근을 α,β 라 하면,
$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$
두 원의 중심거리 :

$$\begin{aligned}\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2} &= \sqrt{2\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}} \\ &= \sqrt{2(4^2-8)}=4\end{aligned}$$

11. 점 $(1,\ 2)$를 지나고 x축 및 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2,\ r^2 - 6r + 5 = 0,\ (r-1)(r-5) = 0$
$\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 $(1, 1)$, $(5, 5)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

12. 두 정점 $A(0,\ 0)$, $B(0,\ 6)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 $2:1$ 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times 6}{2+1}\right) = (0,\ 4)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times 6}{2-1}\right) = (0,\ 12)$

$\therefore$ 중심은 $(0,\ 8)$ 이고, 반지름이 4 인 원

$\Rightarrow$ 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$

13. 두 정점 A$(0,0)$, B$(0,3)$ 에서의 거리의 비가 $2\ :\ 1$ 인 점 P(x,y) 의 자취는?

① $x^2+(y-4)^2=4$ ② $x^2+(y+4)^2=4$
③ $(x-4)^2+y^2=4$ ④ $(x+4)^2+y^2=4$
⑤ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

해설

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$
즉 $4\overline{PB}^2=\overline{PA}^2$ 이므로
$4\left\{x^2+(y-3)^2\right\}=x^2+y^2$
$3x^2+3y^2-24y+36=0$
$\therefore x^2+(y-4)^2=4$

14. 점 A(8, 0) 과 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$
② $x^2+(y-4)^2=4$
③ $x^2+(y+4)^2=4$
④ $(x-4)^2+y^2=4$
⑤ $(x+4)^2+y^2=4$

해설

$x^2+y^2=16$ 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$ 라 하면
$\mathrm{A}(8,0), \mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 의 중점의 좌표 $\mathrm{M}(x,y)$ 는
$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{a}+8}{2},\frac{\mathrm{b}}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+8}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$
$\therefore\ \ a=2x-8,\ b=2y$
이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=16$ 이 성립한다.
$(2x-8)^2+(2y)^2=16$
$\therefore (x-4)^2+y^2=4$

15. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 9$

16. 두 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=1,\ x^2+(y+2b)^2=9$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은?

① $a^2+b^2<4$　　② $4<a^2+b^2<16$

③ $a^2+b^2<16$　　④ $1<4a^2+9b^2<10$

⑤ $a^2+b^2<25$

해설

두 원의 중심이 각각$(-a,-b),(0,-2b)$ 이므로
중심거리 d는
$d=\sqrt{(-a-0)^2+(-b+2b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$
따라서 두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 조건은
$3-1<\sqrt{a^2+b^2}<3+1$
$\therefore\ \ 4<a^2+b^2<16$

17. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-6x=0$ 의 두 교점과 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 0)$ ② $\left(\frac{9}{8},\ 0\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$
④ $\left(\frac{9}{5},\ 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$

해설
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-6x)=0\cdots㉠$
㉠은 $(0,\ 1)$ 을 지나므로 대입하면 $1-4+k=0$
$\therefore\ k=3\cdots㉡$
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$4x^2+4y^2-18x-4=0$
$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+y^2=\frac{97}{16}$
원의 중심은 $\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$

18. 두 원 $x^2+y^2-x-2y-2=0$, $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1,0),(-1,2)$　② $(-2,1),(0,2)$
③ $(1,2),(4,-2)$　④ $(4,2),(-3,5)$
⑤ $(-6,7),(-8,4)$

해설

공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-x-2y-2)-(x^2+y^2-2x-2y-3)=0$에서 $x=-1$
공통현의 방정식 $x=-1$ 을
$x^2+y^2-x-2y-2=0$ 에 대입하면
$(-1)^2+y^2-(-1)-2y-2=0$
$y^2-2y=0$
$y(y-2)=0$
$\therefore y=0$ 또는 $y=2$
따라서, 구하는 교점의 좌표는 $(-1,0)$, $(-1,2)$

19. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

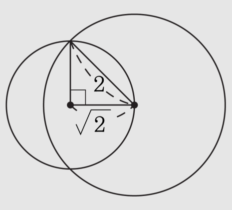
① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $3\sqrt{2}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$\therefore$ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

20. 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a의 값의 합은?

① -4　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

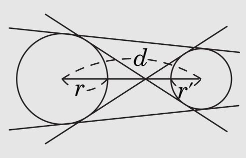
원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$이
원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원$x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1 + a)x + (a + 1)y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ -a)$ 를 지나므로
$(1 + a) \times (-1) + (a + 1) \times (-a) - 2 = 0$
$a^2 + 2a = 0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

21. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x - 9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r \sim r' = 1$ $d = 9$ 이므로

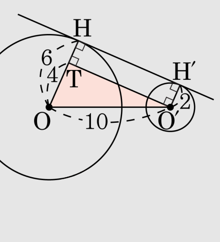
$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

22. 다음 두 원 $x^2+y^2=36$, $(x-6)^2+(y-8)^2=4$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이의 합을 구하면?

① $2+\sqrt{19}$ ② $1+3\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{13}+\sqrt{31}$

④ $6+2\sqrt{21}$ ⑤ $5+4\sqrt{51}$

해설



두 원의 반지름의 길이는 각각 $6, 2$ 이고, 두 원의 중심을 각각 O, O' 이라고 할 때, $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{O}'(6,8)$ 이므로 중심거리는 $\sqrt{6^2+8^2}=10$ 이다. (i) 다음 그림과 같이 점 O' 에서 $\overline{\mathrm{OH}}$ 에 내린 수선의 발을 T라고 하면

$\overline{\mathrm{TH}}=\overline{\mathrm{O'H'}}=2$ 이므로

$\overline{\mathrm{OT}}=6-2=4$

한편, $\triangle \mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로

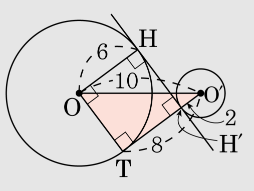
피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{O'T}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{OT}}^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$

이 때, $\overline{\mathrm{HH}}=\overline{\mathrm{O'T}}$ 이므로 구하는 공통외접선의 길이는 $2\sqrt{21}$

(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면

$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=6$ 이므로 $\overline{\mathrm{O'T}}=6+2=8$



한편, $\triangle \mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 6

(i), (ii) 에서 구하는 길이의 합은 $2\sqrt{21}+6$

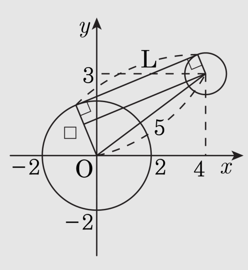
23. 두 원 $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{6}$　② 4　③ 5　④ $6\sqrt{2}$　⑤ 6

해설

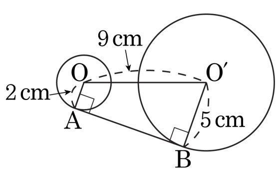
$x^2 + y^2 = 4$, $(x-4)^2 + (y-3)^3 = 1$ 의 외접선의 길이는 그림의 L 과 같다.
두 중심사이의 거리는 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이므로

$\Rightarrow$ $L^2 = 5^2 - (2-1)^2 = 24$



$\therefore$ $L = 2\sqrt{6}$

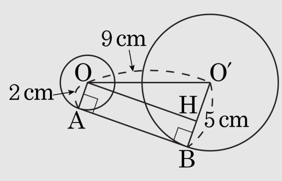
24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 $2\,\text{cm}$, $5\,\text{cm}$ 인 두 원 O, O′ 의 중심 사이의 거리가 $9\,\text{cm}$ 일 때, 공통외접선 $\overline{\text{AB}}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{2}\,\text{cm}$　② $8\,\text{cm}$　③ $5\sqrt{2}\,\text{cm}$
④ $7\,\text{cm}$　⑤ $4\sqrt{3}\,\text{cm}$

해설

다음 그림에서 점 O 에서 $\overline{\text{BO}'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$\overline{\text{AO}} = \overline{\text{BH}}$
$\therefore \overline{\text{O}'\text{H}} = 5 - 2 = 3$
따라서 $\triangle\text{OHO}'$ 에서
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\text{AB}} = \overline{\text{OH}} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$

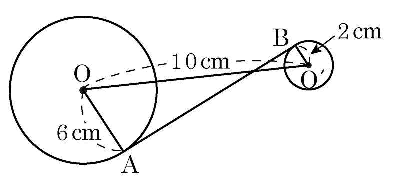
25. 두 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, $(x-5)^2+(y-7)^2=9$ 의 공통접선의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4 ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{21}$

해설

원의 중심 $(2,3)$ 과 $(5,7)$ 사이의 거리를 구하면
$\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$ 이므로
두원의 반지름이 5 와 3 이므로
$d<R+r$ 이므로 두 원은 두 점에서 만나므로
공통외접선만 구할 수 있다.
그러므로, 공통외접선의 길이는
$\sqrt{5^2-(5-3)^2}=\sqrt{21}$ 이다.

26. 다음 그림의 두 원 O 와 O′ 에서 공통접선 AB 의 길이를 구하면?

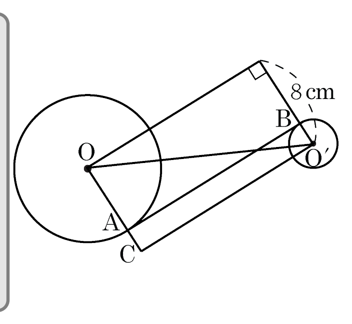


① 6　　② 8　　③ 10

④ 7　　⑤ 9

해설

다음 그림과 같이 AB를 평행이동 시켜 생각하면
OO′C 는 직각삼각형이고
$\overline{AB} = \overline{OC}$ 이다.
$\therefore \overline{O'C}^2 = 100^2 - 8^2 = 36$, $\overline{O'C} = 6$



27. 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$　② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$
③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$　④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$
⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

해설

$(x-2a)^2+y^2=4a^2$ ……㉠
$y=x+2$ ……㉡
에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2x^2+4(1-a)x+4=0$
$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$
㉠, ㉡이 많나지 않으려면
$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$
$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$
(다른해설) 원의 중심 $(2a,0)$ 에서
직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면
$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a+1|$
원과 직선이 만나지 않으려면
$\sqrt{2}|a+1|=|2a|$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-2a-1<0$　$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

28. 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 만나지 않도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5<k<5$ ② $k>5,\ k<-5$ ③ $-5\le k\le 5$
④ $k\ge 5,\ k\ge -5$ ⑤ $0<k\le 5$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면, 원 중심과 직선사이 거리가 원 반지름보다 커야 한다.

$\therefore\ \dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+1}}>\sqrt{5}$

$\Rightarrow\ k>5$ 또는 $k<-5$

29. 중심이 C(1, 2)이고, 직선 L : $x+2y=0$에 접하는 원의 반지름을 r이라 할 때 r^2은 얼마인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로
반지름은 $\frac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
∴ 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로
∴ $r^2=5$

30. 원 $x^2+y^2-4x-2y=a-3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a>-2$ ② $a\geq -1$ ③ $-1\leq a<2$

④ $-2<a\leq 2$ ⑤ $-2\leq a<3$

해설

$x^2+y^2-4x-2y=a-3$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=a+2$

중심이 (2, 1) 이고, 반지름이 $\sqrt{a+2}$ 인 원이다.

x 축과 만나려면 $\sqrt{a+2}\geq 1\cdots$①

y 축과 만나지 않으려면 $0<\sqrt{a+2}<2\cdots$②

①, ②를 동시에 만족하므로

$\therefore\ -1\leq a<2$

31. 원 $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ 에 의하여 잘리는 x 축 위의 선분의 길이를 구하면?

① 0.5 ② 1.0 ③ 1.5 ④ 2.0 ⑤ 2.5

해설

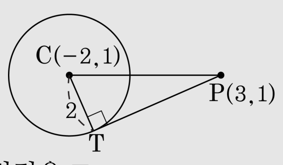
원의 방정식을 정리하면, $(x+2)^2+(y-1)^2=2$
이 원이 x 축과 만나는 점은 $y=0$ 을 대입하여 구할 수 있다.
$\Rightarrow\quad (x+2)^2+1=2$
$\Rightarrow\quad x=-1,\ -3$
$\therefore\quad x$ 축 위의 선분의 길이는 2

32. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{21}$

해설

원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 을 표준형으로 고치면
$(x+2)^2+(y-1)^2=4$
아래 그림과 같이 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 접선을 그어 그 접점을 T,



원의 중심을 $\mathrm{C}(-2,1)$ 이라고 하면 $\triangle\mathrm{PTC}$ 는 $\angle\mathrm{PTC}=90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2$$
$$=\left\{\sqrt{(3+2)^2+(1-1)^2}\right\}^2-2^2=21$$

$\therefore \overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{21}$

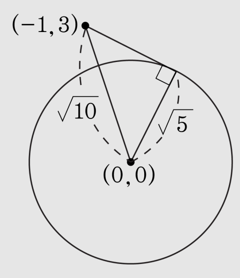
33. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

접선의 길이를 구하는 것이므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2-5} = \sqrt{5}$



34. 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

35. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 위의 점 $(3,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하면 $ax + by = 3$이 될 때, $a - b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 4

해설

공식 $x_1x + y_1y - 4 \cdot \dfrac{(x_1 + x)}{2} - 6 \cdot \dfrac{(y_1 + y)}{2} + 3 = 0$에 의해

$3x + 0 - 2x - 6 - 3y + 3 = 0$

$\rightarrow x - 3y = 3$이 된다.

$\therefore a = 1, \quad b = -3$

36. 직선 $y = \sqrt{3}x + 5$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = \sqrt{3}x \pm 8$　② $y = \sqrt{2}x \pm 8$　③ $y = \sqrt{3}x \pm 7$
④ $y = -\sqrt{3}x \pm 8$　⑤ $y = -\sqrt{2}x \pm 8$

해설

기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선을 구하는 문제이다.
공식에서 $y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3+1}$,
$\therefore\ y = \sqrt{3}x \pm 8$

해설

(다른 풀이1)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 두면
$x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 연립방정식의 해는 중근이다.
$x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 16$, $4x^2 + 2n\sqrt{3}x + n^2 - 16 = 0$,
$D/4 = (n\sqrt{3})^2 - 4(n^2 - 16) = 0$
$\therefore\ n = \pm 8$
구하는 접선은 $y = \sqrt{3}x \pm 8$
(다른 풀이2)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선 $y = \sqrt{3}x + n$ 에서
$\sqrt{3}x - y + n = 0$
원의 중심에서 이 직선에
이르는 거리가 반지름과 같으므로
$\dfrac{|n|}{\sqrt{3+1}} = 4$,
$\therefore\ n = \pm 8$,
따라서 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

37. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$	㉡ $y = 4$
㉢ $3x + 4y + 10 = 0$	㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면
접선의 방정식은
$x_1 x + y_1 y = 4 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
$2x_1 + 4y_1 = 4,\ x_1 + 2y_1 = 2 \cdots\cdots$ ㉡
또, 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로
$x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x_1 = 2, y_1 = 0$ 또는 $x_1 = -\frac{6}{5}, y_1 = \frac{8}{5}$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$x = 2$ 또는 $3x - 4y + 10 = 0$

38. 점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2=5$ 에 접할 때, 접점의 좌표 또는 접선의 방정식으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 접점의 좌표 : $(2,\ 1)$

② 접선의 방정식 : $2x+y-5=0$

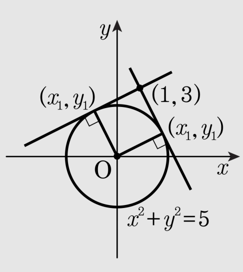
③ 접점의 좌표 : $(-1, 2)$

④ 접선의 방정식 : $x-2y+5=0$

⑤ 접점의 좌표 : $(1,\ 2)$

해설

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ 이라고 하면 접선의 방정식은



$x_1x+y_1y=5 \cdots\cdots$ ㉠

이때, 접선 ㉠은 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$x_1+3y_1=5 \cdots\cdots$ ㉡

또한, 접점 (x_1, y_1) 은 원 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=5 \cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x_1=5-3y_1$ 을 ㉢에 대입하여 풀면

$x_1=2,\ y_1=1$ 또는 $x_1=-1,\ y_1=2$

따라서, 구하는 접점의 좌표는 $(2, 1), (-1, 2)$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$2x+y-5=0$ 또는 $x-2y+5=0$

39. 점 $(1,\ 3)$ 에서 $x^2+y^2=5$ 에 그은 접선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

점 $(1,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식의 기울기를 m 이라 하면
$y=m(x-1)+3$
직선이 원에 접하므로 이 직선과 원의 중심 사이의 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|m\times 0+(-1)\times 0-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$(-m+3)^2=5(m^2+1)$

방정식을 풀면, $m=-2,\ \frac{1}{2}$

$\therefore$ 직선의 방정식은 $2x+y-5=0,\ x-2y+5=0$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

40. 점 $(1,\ 2)$에서 원 $x^2 + y^2 = 4$에 그은 접선 중 x축과 평행이 아닌 접선의 기울기는?

① $-\frac{5}{3}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{4}{3}$　④ -1　⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 접선의 식을
$y-2=m(x-1)$이라 놓으면 원의 중심 $(0,\ 0)$과
$y-2=m(x-1)$ 즉, $mx-y-m+2=0$까지의 거리는 원의 반지름 2와 같으므로

$2=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$, $|-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2-4m+4=4m^2+4$, $3m^2+4m=0$

따라서 기울기 $m=0,\ -\frac{4}{3}$이다.

x축과 평행하지 않으므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

41. 다음 <보기> 중에서 점 $(2,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 <u>모두</u> 고르면?

보기

㉠ $2x+y=4$	㉡ $x=2$
㉢ $3x+4y=10$	㉣ $3x-4y=2$

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉢ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉣

해설

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고
점 $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=m(x-2)+1=mx-2m+1$
$\therefore mx-y-2m+1=0 \ \cdots$ ㉮
원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉮ 사이의 거리가
원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로
$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, |-2m+1|=2\sqrt{m^2+1}$
양변에 제곱을 하여 정리하면
$4m^2-4m+1=4m^2+4$,
$m=-\frac{3}{4}$을 ㉮에 대입하여 정리하면
$3x+4y-10=0$
한편, 점 $(2,\ 1)$에서
원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선 중
y축과 평행한 접선을 가지므로 $x=2$

42. 점 A$(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

점 A$(0,\ a)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서
접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

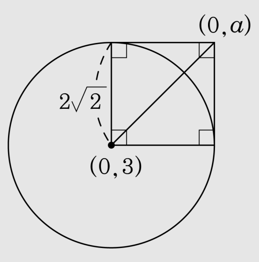
← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,
$(a-3)^2=8(m^2+1)$
$8m^2-a^2+6a-1=0$
m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0,\quad (a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

원의 중심 $(0,\ 3)$에서 A$(0,\ a)$까지의
거리는
반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대
각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=$
$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$
$a-3=\pm4$
$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$
그런데 $a>0$ 에서 $a=7$

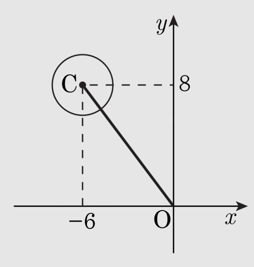


43. 원점에서 $x^2+y^2+12x-16y+96=0$ 위의 임의의 점까지의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 12　② 16　③ 20　④ 24　⑤ 28

해설

$x^2+y^2+12x-16y+96=0$을 변형하면
$(x+6)^2+(y-8)^2=4$이므로
이 원은 중심이 $\mathrm{C}(-6,8)$, 반지름의 길이가 2이다.
이 때, 원점 O에서 점 $\mathrm{C}(-6,8)$에 이르는 거리는
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$이므로
원점 O에서 원 위의 점에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OC}}-2=10-2=8$이고,
최댓값은 $\overline{\mathrm{OC}}+2=10+2=12$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 20이다.



44. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

45. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

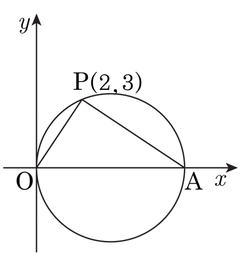
해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$ 이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

따라서 구하는 최소 거리는
$d-$ (원의 반지름의 길이)$=8-5=3$

46. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a-2)^2 + 3^2$
$a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

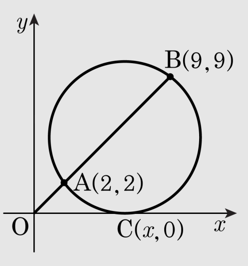
반원의 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle OPA = 90°$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라 하면
$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1,\ 2a - 4 = 9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

47. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

48. 점 A$(2,4)$와 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\dfrac{\pi}{2}$　② π　③ $\dfrac{3}{2}\pi$　④ 2π　⑤ 3π

해설

원 위의 점을 P(a,b), 선분 AP의 중점을 Q(x,y)라 하면

$x=\dfrac{2+a}{2}$, $y=\dfrac{4+b}{2}$

$\therefore a=2(x-1),\ b=2(y-2)$　$\cdots$ ㉠

이 때 P(a,b)가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2-4a-2b+1=0$　$\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$

$x^2+y^2-4x-5y+\dfrac{37}{4}=0$

$\therefore (x-2)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)=1$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi \doteqdot 2\pi$

49. 점 $\mathrm{P}(a, 0)$ 에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 에 그은 접선의 길이가 4 일 때, 점 P 의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0)$, $(7, 0)$　② $(-1, 0)$, $(7, 0)$　③ $(1, 0)$, $(-7, 0)$
④ $(-1, 0)$, $(5, 0)$　⑤ $(1, 0)$, $(-5, 0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3, 2)$, 접점을 Q 라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-3)^2+2^2}$
CPQ는 직각삼각형이므로
$(a-3)^2+4=2^2+4^2$
$a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$ 이다.

50. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x| \cdots$ ㉠

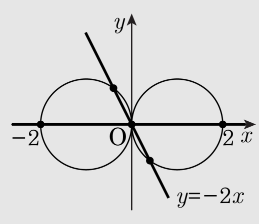
$x^2+y^2=2|x+y| \cdots$ ㉡

㉠) 과 ㉡) 에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x \cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm 2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)