

1. x, y 에 관한 이차방정식 $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8y - 3 = 0$ 이 나타내는 두 직선의 기울기의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8y - 3$$

$$= (3x + y + 3)(x + 3y - 1)$$

이므로 두 직선은 $3x + y + 3 = 0, x + 3y - 1 = 0$ 이다.

따라서 두 직선의 기울기의 곱은 $-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$

2. x, y 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ 이 나타내는 두 직선을 $y = ax + b, y = cx + d$ 라 할 때, $a + b + c + d$ 를 구하면?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1$$

$$= (x - y)^2 - 1^2$$

$$= (x - y + 1)(x - y - 1) \text{ 이므로}$$

주어진 이차방정식이 나타내는 두 직선은

$$y = x + 1, y = x - 1 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a + b + c + d = 2$$

3. 세 직선 $x + 2y = 5$, $2x - 3y = 4$, $ax + y = 0$ 이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a 의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$

② $-\frac{3}{23}$

③ $-\frac{1}{23}$

④ $\frac{2}{23}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$ 이므로

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = -\frac{2}{3}$ 이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x + 2y = 5$ 와 $2x - 3y = 4$ 의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax + y = 0$ 위에 있으려면 $a = -\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

4. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $y = ax + 2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$$2x - y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x - 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$y = ax + 2 \cdots \textcircled{㉢} \text{이라 할 때,}$$

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{를 연립하여 풀면 } x = 2, y = 0$$

두 직선의 교점 $(2, 0)$ 이 직선 $y = ax + 2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$$0 = 2a + 2, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

5. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $3x + 2y - 3 = 0$ 의 교점을 지나고 직선 $2x - 3y + 1 = 0$ 에 평행한 직선은?

① $y = 3x - \frac{12}{7}$

② $y = 3x + \frac{12}{7}$

③ $y = 3x + \frac{1}{21}$

④ $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{21}$

⑤ $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{21}$

해설

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{을 연립하면}$$

$$(x, y) = \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$2x - 3y + 1 = 0$ 과 평행한 임의의 직선은

$$2x - 3y + c = 0 \text{이고}$$

$\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$ 를 대입하면

$$\therefore c = -\frac{1}{7}$$

$$2x - 3y - \frac{1}{7} = 0$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{21}$$

6. 두 직선 $3x - 2y - 4 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ 의 교점과 점 $(1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $5x - y - 9 = 0$

② $5x + y - 9 = 0$

③ $x - 2y - 1 = 0$

④ $2x - 3y - 1 = 0$

⑤ $2x - y + 3 = 0$

해설

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠} \\ x + 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} : x = 2, y = 1$$

$\therefore$ 교점 : $(2, 1)$

$$\therefore \text{구하는 직선은 } y - 1 = \frac{-4 - 1}{1 - 2}(x - 2) = 5(x - 2)$$

$$\therefore 5x - y - 9 = 0$$

7. 두 직선 $x + y = 1$, $ax + 2y + a + 2 = 0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x + y = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$ax + 2y + a + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 : (a - 2)x + a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{a + 4}{2 - a}$$

$$\Rightarrow y = 1 - x = \frac{2a + 2}{a - 2}$$

$$\therefore \text{교점} : \left(\frac{a + 4}{2 - a}, \frac{2a + 2}{a - 2} \right)$$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$$\frac{a + 4}{2 - a} > 0, \frac{2a + 2}{a - 2} > 0$$

두 식의 양변에 $(a - 2)^2$ 을 곱하면

$$(a - 2)(a + 4) < 0, 2(a + 1)(a - 2) > 0$$

$$\Rightarrow -4 < a < 2, a < -1 \text{ or } a > 2$$

$$\therefore -4 < a < -1$$

$\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

8. 두 점 A(2, 1), B(-1, 3)을 연결한 선분 AB와 직선 $l: y = k(x+2) + 2$ 가 공유점을 가질 k 의 범위는 $\alpha \leq k \leq \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$

② 1

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$y = k(x+2) + 2$, $k(x+2) + 2 - y = 0$ 은
 k 에 관계없이 $x+2=0$, $2-y=0$ 의 교점
 즉, $(-2, 2)$ 를 지난다.

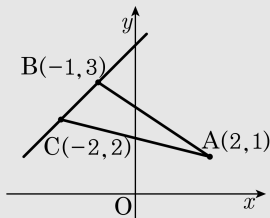
이 점을 C라 하면 선분 AB와 직선 l
 이

만나려면 그림에서 l 의 기울기 k 가
 l_2 의 기울기보다 작거나 같아야하고,
 l_3 의 기울기보다 크거나 같아야한다.

$$\beta = (l_2 \text{의 기울기}) = \frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$$

$$\alpha = (l_3 \text{의 기울기}) = \frac{2-1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$



9. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0, 0), (2, 6), (6, 3)$

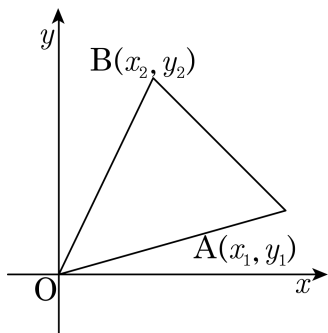
▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

10. 원점 $O(0, 0)$ 와 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 로 이루어진 삼각형 OAB 의 넓이는?



- ① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
 ④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$$\therefore y_1x - x_1y = 0$$

점 $B(x_2, y_2)$ 에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$ 까지의 거리 h 는

$$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

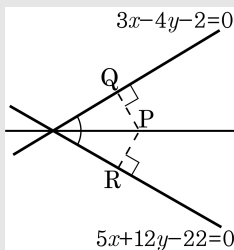
11. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$