1. 점 $A(-1,\ -1)$에 대하여 점 $P(2,\ 3)$과 대칭인 점 Q의 좌표를 구하면?

① $Q(-4,\ 5)$　　② $Q(4,\ -5)$　　③ $Q(-4,\ -5)$
④ $Q(-2,\ -3)$　　⑤ $Q(1,\ 1)$

해설

점 P와 점 Q는 점 A에 대하여 대칭이므로
$\overline{PA} = \overline{QA}$이다.
즉 선분 PQ의 중점이 점 A이다.
$Q(x,\ y)$라 하면, 점 $P(2,\ 3)$과
점 Q를 이은 선분의 중점이 $A(-1,\ -1)$이므로
$\dfrac{x+2}{2} = -1$, $\dfrac{y+3}{2} = -1$
$\therefore\ x = -4,\ y = -5$
$\therefore Q(-4,\ -5)$

2. $\triangle$ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5, 4)$, 변 AB 의 중점의 좌표가 $(-1, 3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$ 일 때, 꼭짓점 B, C 의 좌표를 구하면?

① B$(-5, 2)$, C$(5, 1)$
② B$(-6, 2)$, C$(4, 0)$
③ B$(-7, 2)$, C$(5, 0)$
④ B$(-7, -1)$, C$(4, 0)$
⑤ B$(-7, -2)$, C$(5, -1)$

해설

B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) 으로 놓으면

$\frac{5+x_2}{2} = -1,\ \frac{4+y_2}{2} = 3,$

$\frac{5+x_2+x_3}{3} = 1,\ \frac{4+y_2+y_3}{3} = 2$

$\therefore\ x_2 = -7,\ y_2 = 2,\ x_3 = 5,\ y_3 = 0$

즉, B$(-7, 2)$, C$(5, 0)$

3. 두 직선 $4x+3y-1=0$ 과 $4x+3y+5=0$ 과의 거리를 d 라 할 때 $5d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

직선 $4x+3y-1=0$ 위의 한 점 이를테면 $(1,\ -1)$ 로부터 직선 $4x+3y+5=0$ 에 이르는 거리를 구하면 되므로

$$\frac{|4\times1+3\times(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore 5d=5\times\frac{6}{5}=6$$

4. 평면 위의 한 점 $(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2,\ 5)$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+3,\ b+2)=(2,5)$ 이므로, $a=-1, b=3$ 이다.
따라서 $a+b=2$

5. 직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x+3y+2=0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,
$2(x+2)+3(y-k)+7=0$
$\therefore\ 2x+3y+11-3k=0$
이 직선이 $2x+3y+2=0$ 과 일치하므로
$11-3k=2 \quad \therefore\ k=3$

6. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0\ ,\ (a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

7. 직선 $y=-x+1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

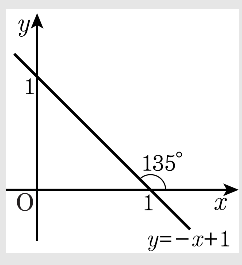
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

▷ 정답 : x 축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



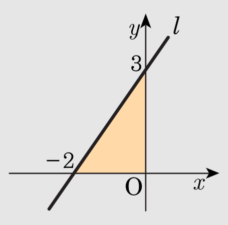
8. 직선 $3x-2y+6=0$이 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



∴ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times2\times3=3$

9. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\ 2a+b=0$

10. 방정식 $x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k<3$　　② $k>3$　　③ $0<k<3$
④ $k>2$　　⑤ $k<2$

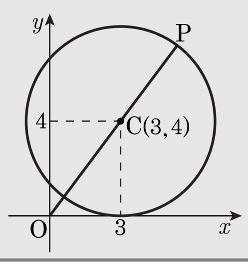
해설
$x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 을 완전제곱식으로
나타내면 $(x+2)^2+(y-3)^2=3-k$
원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로
$\sqrt{3-k}>0,\ 3-k>0 \quad \therefore\ k<3$

11. 중심의 좌표가 (3, 4) 이고 x 축에 접하는 원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은? (단, O 는 원점)

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 9

해설

이 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-4)^2=4^2$
다음 그림과 같이 원의 중심을 C 라 하면
원점과 중심을 지나는 직선이 원과 만나
는
두 점 중 한 점을 P 라 할 때,
$\overline{\mathrm{OP}}$ 가 최대이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OC}}+4=\sqrt{3^2+4^2}+4=9$



12. 반지름의 길이가 5 cm, 8 cm 인 두 원의 중심거리가 3 cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

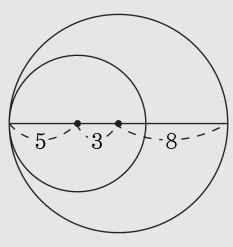
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8 인 원 안에 내접한다.



13. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

14. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

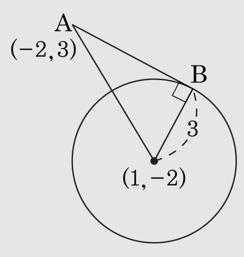
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

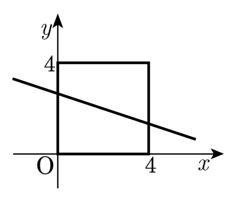
$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



15. 직선의 방정식 $ax+2y-5=0$이 다음 그림과 같이 정사각형의 넓이를 이등분 할 때, a의 값은 얼마인가?



① 2　② -1　③ 1　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 직선이 정사각형의 넓이를 이등분하려면 정사각형 대각선의 교점인 중심 $(2,2)$를 지나야 한다.

$ax+2y-5=0$에서 $2a+4-5=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

16. 직선 $3x+4y=0$ 에 평행하고 원점으로부터 거리가3 인 직선 중 1 사분면을 지나는 직선의 y 절편은?

① 15　② -15　③ $\frac{15}{4}$　④ $-\frac{15}{4}$　⑤ 3

해설

직선을 $3x+4y+a=0$ 라 하면,

$\frac{|a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$ 에서

$\therefore\ a=\pm 15$

y 에 대해 정리하면 $y=-\frac{3}{4}x\pm\frac{15}{4}$

기울기가 음수인 직선이 1 사분면을 지나기 위해서는 y 절편은 양수이어야 한다.

따라서 이 직선의 y 절편은 $\frac{15}{4}$

17. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의
위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.
이 때, $x^2+y^2=1$ 은 중심이 $(0,0)$,
반지름의 길이가 1 인 원이고
$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 은 중심이 $(3,-4)$,
반지름의 길이가 r 인 원이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2} > 1+r$
$5 > 1+r$
$\therefore 0 < r < 4$
따라서, 자연수 r 은 $1, 2, 3$ 으로 모두 3개이다.

18. 직선 $y = mx + 5$ 가 두 점 $(2,\ 3)$, $(4,\ -1)$ 을 잇는 선분과 한 점에서 만날 때, 정수 m 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

선분과 직선이 만나려면 직선 $mx - y + 5 = 0$ 에 대하여 두 점 $(2,\ 3)$, $(4,\ -1)$ 중 한 점은 직선의 윗부분에, 다른 한 점은 직선의 아랫부분에 존재해야 한다.

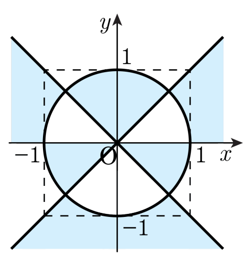
즉, $(2m - 3 + 5)(4m - (-1) + 5) \le 0$

$(m + 1)(2m + 3) \le 0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2} \le m \le -1$

따라서 정수 m 은 -1 (1 개)

19. 다음 그림의 어두운 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선 포함)



① $(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

② $x(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \leq 0$

③ $x(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

④ $y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

⑤ $y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \leq 0$

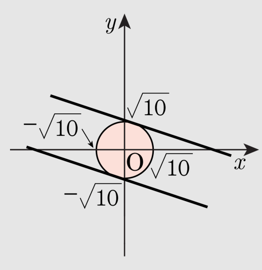
해설

주어진 그림에서 경계선은 직선
$y=x,\ y=-x$ 와
원 $x^2+y^2=1$ 및 x 축$(y=0)$이다.
따라서, $f(x,\ y)=y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1)$ 로 놓고
주어진 영역에 속하는점 $(2,\ 1)$ 을 대입하면
$f(2,\ 1)=1\cdot1\cdot3\cdot2-12>0$ 이다.
이때, 경계선을 포함하므로 구하는 부등식은
$y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

20. 부등식 $x^2 + y^2 \le 10$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x + 3y$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

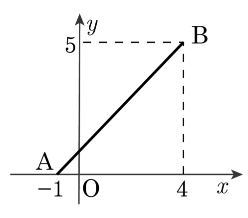
① -100 ② -10 ③ 10 ④ 50 ⑤ 100

해설



$x + 3y = k$ 라 하고 직선을 움직여보면
직선 $x + 3y = k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 10$ 에
접할 때,
k 는 최댓값과 최솟값을 갖는다.
$(-3y + k)^2 + y^2 = 10$ 에서
$9y^2 - 6ky + k^2 + y^2 - 10 = 0$
방정식 $10y^2 - 6ky + k^2 - 10 = 0$ 의 판별식을
D 라 하면 $\dfrac{D}{4} = (-3k)^2 - 10(k^2 - 10) = 0$
$k^2 = 100 \qquad \therefore k = \pm 10$
따라서 최댓값은 10 , 최솟값은 -10 이므로
$Mm = -100$

21. 두 점 A(−1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$ ② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$ ④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

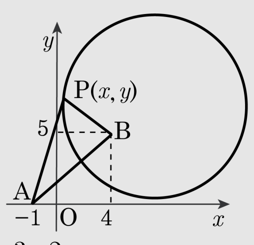
해설

점 P를 (x, y)라 두면

$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로



$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

22. 두 원 $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4y-1=0$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{95}$　② $\dfrac{\sqrt{95}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{95}}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{95}}{4}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

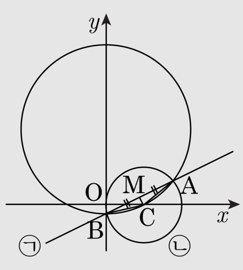
$x^2+y^2-2x-\left(x^2+y^2-4y-1\right)=0$

$-2x+4y+1=0,\ 2x-4y-1=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-2x=0$에서

$(x-1)^2+y^2=1 \cdots\cdots$ ㉡

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C(1, 0)이라 하면



중심 C(1, 0)에서 직선 ㉠까지의 거리 $\overline{\mathrm{CM}}$은

$$\overline{\mathrm{CM}}=\frac{|2-0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=2\cdot\frac{\sqrt{95}}{10}=\frac{\sqrt{95}}{5}$$

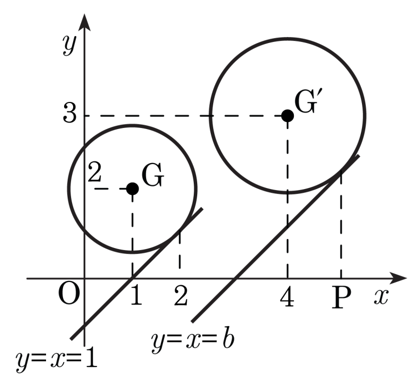
23. 점 $(1,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$
따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

24. 다음 그림과 같이 같은 크기의 두 원 G : $(x-1)^2+(y-2)^2=2$, G′ : $(x-4)^2+(y-3)^2=2$가 있다. 또, 원 G는 $x=2$에서 직선 $y=x-1$ 에 접하고, G′은 $x=p$에서 직선 $y=x-b$에 접하고 있다. 이 때, $p+b$의 값은?



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

원 G′은 원 G를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 원 G의 접점의 좌표는 $(2,\ 1)$이므로
원 G′의 접점의 좌표는 $(5,\ 2)$이다.
따라서, $p=5$이고, 점 $(5,\ 2)$는 직선 $y=x-b$ 위의 점이므로
$2=5-b$에서 $b=3$
$\therefore\ p+b=5+3=8$

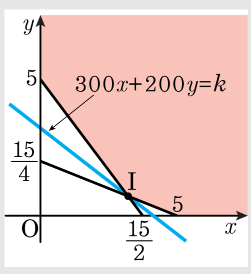
25. 어떤 동물을 사육하는데 매일 두 영양소 A, B 가 최저 30 씩 필요하다고 한다. 약품 X, Y 안에 1 g 에 들어있는 A, B 가격은 아래 표와 같다.

약품	A	B	1 g의 가격
X	6	12	300
Y	8	6	200

최소의 비용으로 A, B 의 필요양을 섭취하려면, 하루에 약품 X, Y 를 얼마씩 주어야 하는가?

① X : 2 g, Y : 3 g
② X : 1 g, Y : 2 g
③ X : 2 g, Y : 4 g
④ X : 1 g, Y : 3 g
⑤ X : 2 g, Y : 1 g

해설



X 를 x g, Y 를 y g 를 섭취한다고 하면,
가격은 $300x + 200y = k$ $\cdots$ ㉠
$x \geq 0$, $y \geq 0$
$6x + 8y \geq 30$,
$12x + 6y \geq 30$
그래프를 그리면,
$\therefore$ $300x + 200y = k$ 가 I $(a,\ b)$ 를 지날 때 최소가 된다.
$6x + 8y = 30$, $12x + 6y = 30$ 의 교점 I $(a,\ b)$ 을 구하면, $a = 1$, $b = 3$ 이다.
$\therefore$ ㉠ 에 대입하면, $300 \times 1 + 200 \times 3 = 900$
$\therefore$ $X = 1$ g, $Y = 3$ g 를 섭취해야 한다.