1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$\begin{aligned} z &= 2(k-i) - k(1+i)^2 \\ &= 2k - 2i - 2ki \\ &= 2k - (2+2k)i \end{aligned}$$

허수 부분이 0이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

2. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a\geq 1$ ③ $-1<a<1$

④ $a>1$ ⑤ $a\geq -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$$

$1-2+a>0$

$\therefore\ a>1$

3. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\dfrac{a}{1} \neq \dfrac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

4. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

5. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R
③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R
⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

6. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$라 놓으면

$2x+ay-b = k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

7. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$이 x에 대한 항등식일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면

$a = 0,\ b = 0,\ c = -1$이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$를 $x^2 + x + 1$로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{rl}
 & x+(a-1) \\
x^2+x+1 \big) & x^3+ax^2+2x+b \\
- & x^3+x^2+x \\
 & (a-1)x^2+x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\
 & (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2 - a = 2,\ b - a + 1 = 1$

$a = 0,\ b = 0$

8. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 를$x-1, x-2, x-3$ 으로 나눈 나머지가 각각 $2, 4, 6$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 11 ⑤ 14

해설

$$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$$
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+ax^2+bx+c$$
$$a+b+c=2,\ 4a+2b+c=4,\ 9a+3b+c=6$$
$$a=0,\ b=2,\ c=0$$
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$$
$$f(4)=3\times2\times1+8=14$$

9. 다음 중 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$의 인수인 것은?

① $x+y+2$　② $x-y+2$　③ $x+2y+1$　④ $x-2y+1$　⑤ $x+y+1$

해설

$$\begin{aligned}&x^2+3xy+2y^2-x-3y-2\\&=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2\\&=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)\\&=(x+2y+1)(x+y-2)\end{aligned}$$

10. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15　　② 25　　③ 35　　④ 45　　⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

11. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

12. x에 대한 일차방정식 $5x+a=2x+12$의 해가 자연수일 때, 자연수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 무수히 많다

해설

$5x-2x=12-a, 3x=12-a$

$\therefore x=\dfrac{12-a}{3}$

자연수 $a=1,2,3,\cdots$ 을 대입했을 때,

$x=\dfrac{12-a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12-a$ 가 3 의 배수이면서 $a<12$ 일 때이다.

i) $a=3$ 일 때, $x=\dfrac{12-3}{3}=3$

ii) $a=6$ 일 때, $x=\dfrac{12-6}{3}=2$

iii) $a=9$ 일 때, $x=\dfrac{12-9}{3}=1$

따라서 자연수 a의 개수는 3개이다.

13. x에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4　　② -3　　③ -2　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^2 + px + q = 0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고

p, q가 유리수이면 남은 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

두 근의 합 $-p = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$

$\therefore p = -4$

두 근의 곱 $q = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$

$\therefore p+q = -4+1 = -3$

14. $x^2-9x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 이 때, 상수 $a+b$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9, \quad \alpha\beta=3$

9, 3을 근으로 하는 x^2의 계수가 1이차방정식은

$(x-9)(x-3)=0$

$x^2-12x+27=0 \quad \therefore a=-12, \ b=27$

15. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4　　② 2　　③ −4　　④ −2　　⑤ 3

해설

$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$

$y = x$ 의 교점은 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$

$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$\therefore \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{(a-2)^2}{2} = 0$

$\therefore a = 2$

16. $0 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$

$0 \leq x \leq 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,
최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.
$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고
최솟값은 $a - 24$ 이다.
최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로
$(a + 1) + (a - 24) = 10$

$\therefore a = \frac{33}{2}$

17. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$

$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로

$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

18. x에 대한 삼차방정식 $x^3-ax^2+5x-b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3-ax^2+5x-b=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1-\sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\beta+\left(1-\sqrt{2}\right)\beta=5$

$-1+2\beta=5,\ 2\beta=6 \quad \therefore\ \beta=3$

따라서, $a=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)+3=5$

$b=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 3=-3$이므로

$a+b=5+(-3)=2$

19. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 α, β라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha = \beta^2$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = -1$

④ $\alpha\beta = -1$

⑤ $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$에서 $x^3 - 1 = 0$

$\rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x - 1 = 0,$ 또는 $x^2 + x + 1 = 0$

$$\therefore\ x = 1,\quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore\ \alpha\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
$\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$의 값을 구해도 된다.

20. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0$, $x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$　② $-\frac{7}{2}$　③ $-\frac{5}{2}$　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0 \cdots$ ㉠

$t^2+at+1=0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ × 2 : $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a \neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

21. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$일 때, $x+y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5$

$=x^2-2(2y-1)x+4y^2-4y+1+y^2-4y+4$

$=x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2+(y-2)^2$

$=(x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$

$\therefore\ x-2y+1=0,\ y-2=0$이므로

$y=2,\ x-4+1=0\quad \therefore\ x=3$

따라서 $x+y=3+2=5$

22. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

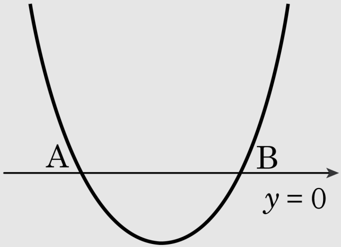
$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2006$$

23. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

해설



A$(\alpha,\ 0)$ B$(\beta,\ 0)$ 이라고 하면 $(\because\ \alpha < \beta)$

$\alpha + \beta = -a$

$\alpha\beta = a$ 이므로

$(\because\ y = x^2 + ax + a)$

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\ = a^2 - 4a$

$\overline{\mathrm{AB}} = \beta - \alpha\ = 2\sqrt{3}$ 이므로

$a^2 - 4a = 12$

$(a - 6)(a + 2) = 0$

$\therefore\ a = -2,\ 6$

24. 다음의 x, y에 대한 연립방정식의 해가 무수히 많을 때, $x+y$의 값을 구하라.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx+cy+a=0 \end{cases}$$

(단, a, b, c는 0이 아닌 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$$\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ㉠ \\ bx+cy+a=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

해가 무수히 많으므로

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$가 성립한다.

따라서, $a=bk,\ b=ck,\ c=ak$에서

$abc=abck^3,$ $abc \neq 0$이므로

$k^3=1$이다.

즉, $k=1,\ a=c$이므로

㉠, ㉡의 식은 $a(x+y+1)=0$

$a \neq 0$이므로

$x+y+1=0$에서 $x+y=-1$

25. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수, $a > 0$)라 두면

$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$

$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$

$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots$ ㉠, $3a^2b - b^3 = 1 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 ㉡에 대입하면

$b = \frac{1}{2},\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ \alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \frac{\sqrt{3}-i}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

해설

$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \frac{1}{i} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left\{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\right\} = 0$

$\alpha + \frac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$

($\because$ 복소수 α 의 실수부가 양이므로)

$\therefore\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$